UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

20. BAND 1./2. HEFT

(AUSGEGEBEN AM 20. MÄRZ 1924)

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1924

QA1
M88
v. 20-23

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, deren vier zu einem Bande vereinigt werden sollen.

Jährlich sollen drei Bände herausgegeben werden. Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

K. Knopp, Königsberg, Bergplatz 6,
L. Lichtenstein, Leipzig, Talstraße 35, Mathematisches Institut,
E. Schmidt, Berlin NW, Altonaerstr. 30,
I. Schur, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

---

20. Band. **Inhalt:** 1./2. Heft.

Seite

Radó, T., Über eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit 1
Hölder, O., Das Volumen in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit und seine Invarianteneigenschaft 7
Lichtenstein, L., Über die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie . . 21
Geppert, H., Entwicklungen willkürlicher Funktionen nach funktionentheoretischen Methoden 29
Bauer, M., Die Theorie der p-adischen bzw. $\mathfrak{P}$-adischen Zahlen und die gewöhnlichen algebraischen Zahlkörper. II. 95
Landau, E., Über die Wurzeln der Zetafunktion 98
Landau, E., Über die ζ-Funktion und die L-Funktionen 105
Remak, R., Über potentialkonvexe Funktionen 126
Weyl, H., Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik 131
Weitzenböck, R., Über orthogonale und Bewegungsinvarianten von Linearformen 151
Ananda-Rau, K., The infinite product for $(s-1)\zeta(s)$ 156

Über eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Von

Tibor Radó in Szeged (Ungarn).

Sei F eine Riemannsche Mannigfaltigkeit[1]). Wir sagen, dieselbe sei fortsetzbar, wenn eine andere Riemannsche Mannigfaltigkeit Φ gefunden werden kann, auf welcher es ein Teilgebiet F' gibt, so daß F umkehrbar eindeutig und konform auf F' abgebildet werden kann. Dabei verlangen wir, daß F' ein echtes Teilgebiet von Φ sei, das heißt nicht identisch mit Φ selbst. Da zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten als identisch gelten, wenn sie eineindeutig und konform aufeinander abgebildet werden können, ist dies eine natürliche Begriffsbestimmung.

Ist F geschlossen, so ist ohne weiteres zu sehen, daß sie nicht fortgesetzt werden kann. Ist F nicht geschlossen und z. B. schlichtartig, so ist sie durch die Vollebene fortsetzbar. Wir fragen nun, ob es überhaupt offene Riemannsche Mannigfaltigkeiten gibt, die nicht fortgesetzt werden können. In funktionentheoretischer Fassung heißt dies: Gibt es außer dem algebraischen Falle noch weitere analytische Gebilde, die in dem Sinne vollständig sind, daß ihre Elemente nicht eineindeutig und konform einem echten Teilsysteme von Elementen eines anderen analytischen Gebildes zugeordnet werden können.

Im folgenden teilen wir ein Beispiel einer offenen nicht fortsetzbaren Mannigfaltigkeit mit. Um dieses Beispiel zu erhalten, nehme man die Ebene ohne den unendlich fernen Punkt, und schlitze dieselbe längs der Strecken $0 \ldots 1, -1 \ldots -2, 2 \ldots 3, -3 \ldots -4, \ldots$ ad inf. auf. Die so aufgeschlitzte Ebene lege man in zwei Exemplaren übereinander und mache die Schlitze kreuzweise zu. So entsteht unsere Mannigfaltigkeit F, die wir etwa als ultra-elliptische Fläche bezeichnen können.

[1]) Wegen der genauen Begriffsbestimmung vgl. H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche.

Es hat zunächst den Anschein, daß diese Fläche bereits aus topologischen Gründen nicht fortgesetzt werden kann. *Dies ist indessen nicht der Fall.* Man bilde die punktierte Ebene topologisch auf das Innere des Einheitskreises ab, wodurch auch eine Abbildung von F erklärt wird, wobei diese in eine augenscheinlich fortsetzbare Fläche übergeht.

Die Unmöglichkeit der Fortsetzung unserer ultra-elliptischen Fläche ist also eine funktionentheoretische Tatsache. Der funktionentheoretische Grund dieser Unmöglichkeit liegt nun im folgenden Lemma.

Lemma. *Sei G ein schlichtes einfach zusammenhängendes Gebiet im Einheitskreise, welches indessen nicht mit dem Innern des Einheitskreises identisch sein soll. Sei ferner $f(z)$ eine in G reguläre Funktion, welche in jedem Randpunkte von G, welcher im Innern des Einheitskreises liegt, verschwindet. Genauer gesagt: Ist α ein Randpunkt von G, welcher im Innern des Einheitskreises liegt, und $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ eine Punktfolge in G, welche gegen α konvergiert, so ist* $\lim f(z_n) = 0$.

Dann wird behauptet, daß $f(z)$ identisch verschwindet.

Bemerkung. Im Falle G durch eine einfache geschlossene Jordankurve begrenzt ist, folgt diese Behauptung aus den Resultaten, die Herr E. Lindelöf in seiner Arbeit *Sur un principe général de l'Analyse* etc. (Acta Soc. Sc. Fennicae t. XLVI) in Weiterverfolgung eines Painlevéschen Gedankens entwickelt hatte (vgl. insbesondere S. 7). Für die Lindelöfsche Methode ist indessen nur der Umstand wesentlich, daß auf dem Einheitskreise ein Bogen vorhanden ist, auf welchem kein Randpunkt von G liegt; ist aber diese Voraussetzung nicht erfüllt, so ist noch ein kleiner Kunstgriff nötig. Übrigens scheint unsere Behauptung evident zu sein; denn bilden wir G auf das Innere des Einheitskreises konform ab, so werden die Randpunkte von G, die im Einheitskreise liegen, in eine Punktmenge übergehen, die voraussichtlich hinreichen wird, um das Verschwinden der verpflanzten Funktion zu bedingen. *Nun braucht aber diese letztere Punktmenge keinen Bogen zu enthalten*, worauf mich Herr Koebe an der Hand eines Beispiels aufmerksam gemacht hatte[2]), und damit fällt die Möglichkeit einer raschen Zuendeführung des Beweises. Man könnte dann versuchen, mit den Fatouschen Sätzen weiterzukommen. Es ist indessen gar nicht nötig, mit solchen Hilfsmitteln zu operieren. Nicht einmal der Fundamentalsatz der konformen Abbildung braucht herangezogen zu werden, was deswegen bemerkenswert ist, weil der einfache Zusammenhang von G offenbar unerläßlich ist.

[2]) S. die Arbeit des Herrn Koebe, Zur konformen Abbildung schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche, Göttinger Nachrichten 1918, S. 19. Der Bereich $S_1^{(1)}$ liefert das erwähnte Beispiel.

Beweis des Lemmas.

1. Zunächst nehmen wir an, daß $z = 0$ in G enthalten ist, was unwesentlich ist, wir machen aber zwei wesentlich beschränkende Annahmen, und zwar erstens, daß am Einheitskreise ein Bogen $\widehat{AB}$ vorhanden ist, der keinen Randpunkt von G enthält, und zweitens, daß $f(z)$ beschränkt ist: $|f(z)| < M$.

Wir nehmen auf dem Bogen $\widehat{AB}$ zwei Punkte A', B' an, so daß die Länge von $\widehat{A'B'} = \frac{2\pi}{\nu}$ wird, unter ν eine positive ganze Zahl verstanden. Hierauf ziehen wir von $z = 0$ die Radien nach A' und B' und schneiden durch einen kleineren konzentrischen Kreis K von diesem Sektor ein viereckiges Gebiet ab. Liegt der Radius von K hinreichend nahe an 1, so wird das Viereck weder im Innern noch am Rande Punkte von G enthalten, eben weil $\widehat{AB}$ keinen Randpunkt von G enthält.

Wir nehmen jetzt um $z = 0$ Drehungen vor mit den Amplituden

$$0, \frac{2\pi}{\nu}, \frac{2\pi}{\nu}2, \ldots, \frac{2\pi}{\nu}(\nu - 1).$$

Dadurch haben wir zunächst das Gebiet zwischen K und dem Einheitskreise vollständig mit Vierecken ausgefüllt. Gleichzeitig erhalten wir durch diese Drehungen die Gebiete

$$G, G_1, \ldots, G_{\nu-1},$$

und indem wir die Funktion $f(z)$ mit hinüberpflanzen, die Funktionen

$$f(z), f_1(z), \ldots, f_{\nu-1}(z).$$

Wir bilden nun den Durchschnitt Σ dieser Gebiete, d. i. die Menge der Punkte, die gleichzeitig in allen diesen ν Gebieten enthalten sind. Σ ist sicher nicht leer, denn $z = 0$ ist ein Punkt von Σ; diese Menge besteht ersichtlich aus inneren Punkten, ist ferner in K enthalten; denn jeder Punkt zwischen K und dem Einheitskreise ist für wenigstens eines unserer Gebiete ein äußerer Punkt. Es ist weiter klar, daß jeder Randpunkt von Σ für wenigstens eines unserer Gebiete ein Randpunkt sein muß. Denn er kann nicht innerer Punkt sein für alle diese Gebiete, dann wäre er nämlich innerer Punkt von Σ. Er kann aber für keines dieser Gebiete ein äußerer Punkt sein, dann könnte er kein Randpunkt von Σ sein.

Die Menge Σ braucht nicht zusammenhängend zu sein. Da sie aber nur aus inneren Punkten besteht, zerfällt sie in höchstens abzählbar viele Gebiete; dasjenige dieser Gebiete, welches $z = 0$ enthält, bezeichnen wir mit T. Jeder Randpunkt von T ist dann gleichzeitig Randpunkt von Σ.

Nun bilden wir die Funktion:

$$\psi(z) = f(z) f_1(z) \ldots f_{\nu-1}(z).$$

Dieselbe ist in T erklärt und daselbst regulär. Sei α ein Randpunkt von T, und $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ eine Punktfolge in T, welche gegen α konvergiert. Nun ist α für wenigstens eines der Gebiete $G, G_1, \ldots, G_{\nu-1}$ ein Randpunkt; außerdem liegt α nicht auf dem Einheitskreise, weil T im kleineren Kreise K enthalten ist. Auf der Folge $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ konvergiert ein Faktor von $\psi(z)$ hiernach gegen Null, die übrigen Faktoren bleiben absolut kleiner als M. Die in T reguläre Funktion $\psi(z)$ verschwindet also am ganzen Rande von T; nach dem Prinzip des absoluten Betrages verschwindet sie identisch. Dann aber muß wenigstens ein Faktor von $\psi(z)$ identisch verschwinden, also auch $f(z)$, weil ja alle diese Faktoren identische Wertegebiete haben.

2. Wir lassen nun die Beschränkungen des vorigen Abschnittes fallen.

Da G mit dem Innern des Einheitskreises nicht identisch ist, können und wollen wir annehmen, daß $z = 0$ Randpunkt von G ist. Die beiden Zweige von $\sqrt{z}$ sind dann in G infolge des einfachen Zusammenhanges eindeutig. Wir behalten einen dieser Zweige. Derselbe bildet G umkehrbar eindeutig und konform auf ein Gebiet G^* ab, und wenn wir die Funktion $f(z)$ mit hinüberpflanzen, und die so erhaltene Funktion mit $f^*(z)$ bezeichnen, so erfüllen G^* und $f^*(z)$ die Voraussetzungen unseres Lemmas. Für G^* ist insbesondere $z = 0$ ein Randpunkt.

Für G^* sind nun im Einheitskreise äußere Punkte vorhanden. Wir können also im Einheitskreise eine kleine abgeschlossene Kreisscheibe $\varkappa$ angeben, welche keinen Punkt von G^* enthält. Nun zeichnen wir um $z = 0$ einen Kreis k, der diese Kreisscheibe durchsetzt. Den Durchschnitt von G^* und des Innengebietes von k bezeichnen wir mit E. E ist sicher nicht leer, da $z = 0$ Randpunkt von G^* ist. E besteht nur aus inneren Punkten, und zerfällt demnach in höchstens abzählbar viele Gebiete. Sei G^{**} eines dieser Gebiete. Dasselbe hängt einfach zusammen. Denn es ist ein beschränktes Gebiet, und wenn C eine einfache geschlossene Jordankurve in demselben ist, so ist das Innere von C sowohl in G^* als auch in k enthalten wegen des einfachen Zusammenhanges dieser Gebiete, folglich auch in G^{**}.

Für G^{**} und die darin reguläre Funktion $f^*(z)$ sind nun alle Voraussetzungen von 1. erfüllt, wenn wir an Stelle des Einheitskreises den Kreis k treten lassen, was offenbar unwesentlich ist. Demnach muß $f^*(z)$, also auch $f(z)$ identisch verschwinden, w. z. b. w. —

Wir wenden uns nunmehr wieder unserer ultra-elliptischen Fläche F zu, und setzen voraus, daß entgegen unserer Behauptung dieselbe durch eine Mannigfaltigkeit Φ fortsetzbar sei. Auf Φ gibt es also ein Teilgebiet F', auf welches F umkehrbar eindeutig und konform abgebildet

werden kann; dabei gibt es Punkte von Φ, die in F' nicht enthalten sind. Es gibt also auch Punkte von Φ, die Randpunkte von F' sind.

Sei P' ein solcher Punkt von Φ. Wir grenzen eine Umgebung von P' ab, und behaupten zunächst, daß dieselbe weitere Randpunkte von F' enthalten muß.

Wäre dies nicht der Fall, so sei C' eine in dieser Umgebung enthaltene einfache geschlossene Kurve, welche P' umschlingt, und sei C die entsprechende Kurve auf F. Sei $P_1', P_2', \ldots, P_n', \ldots$ eine Punktfolge auf F', die gegen P' konvergiert, und $Q_1', Q_2', \ldots, Q_n', \ldots$ eine beliebige unendliche Punktfolge auf F'. Ist es möglich, daß diese letztere keine Häufungsstelle in F' hat? Sei dies der Fall, und seien $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ die entsprechenden Punktfolgen auf F. Diese dürfen auf F keine Häufungsstelle haben, und die Projektionen dieser Punkte müssen demnach ins Unendliche streben. Die Projektion der Kurve C liegt hingegen notwendig in einem beschränkten Gebiete, also in einem großen Kreise; sobald die Projektionen von P_n, Q_n außerhalb dieses Kreises liegen, können P_n und Q_n auf F miteinander verbunden werden, ohne C zu überschreiten. Da nun P_n' für große Werte von n in der durch C' bestimmten Umgebung von P' liegt, muß dies auch für Q_n' der Fall sein. Denn P_n' und Q_n' können für große Werte von n innerhalb F' miteinander verbunden werden, ohne C' zu überschreiten, weil diese Möglichkeit nach Abbildung auf F besteht. Wir sehen also: Ist $Q_1', Q_2', \ldots, Q_n', \ldots$ eine Punktfolge in F', die innerhalb F' keine Häufungsstelle hat, so konvergiert dieselbe gegen P'. Wenn also dieser Punkt dem Gebiete F' hinzugefügt wird, so erhalten wir eine geschlossene Fläche. Diese müßte aber unendlich hohen Zusammenhang haben, und bei einer geschlossenen Riemannschen Fläche ist dies unmöglich.

Es steht somit fest, daß in jeder Umgebung von P' weitere Randpunkte von F' anzutreffen sind. Wir grenzen durch eine einfache geschlossene Kurve C' eine Umgebung U von P' ab, wobei wir darauf achten, daß auf C' wenigstens ein Randpunkt Q' von F' liege, und betrachten diejenigen Punkte von F', welche in dieser Umgebung liegen. Diese Punkte bilden eine gewisse Punktmenge Σ, welche nur innere Punkte enthält und dementsprechend aus Gebieten besteht. Sei G ein solches Gebiet. Wir behaupten, daß G einfach zusammenhängt. Wäre dies nicht der Fall, so könnten wir in G eine einfache geschlossene Linie L' angeben, innerhalb welcher ein Randpunkt R' von G liegt. Jetzt nehmen wir in F' zwei Punktfolgen Q_n', R_n' an, die gegen Q' bzw. R' konvergieren. Für große Werte von n könnten dann Q_n' und R_n' innerhalb F' nicht verbunden werden ohne Überschreitung der Linie L'. Dies kann indessen nicht der Fall sein. Denn übertragen wir alles auf die

ultra-elliptische Fläche F, so erhalten wir zwei Punktfolgen Q_n, R_n, die ins Unendliche gehen, und eine einfache geschlossene Linie L. Q_n und R_n können aber für große Werte von n sicher miteinander verbunden werden, ohne L zu überschreiten, wie dies im vorigen Abschnitt erläutert wurde. Das Gebiet G hängt hiernach einfach zusammen, und ist offenbar nicht identisch mit der ganzen Umgebung U, weil z. B. der Punkt P' sicher kein Punkt von G ist.

Wir haben bisher absichtlich rein topologisch geschlossen, um den funktionentheoretischen Grund unseres Satzes ganz greifbar zu machen. Topologisch können wir nicht zum Ziele kommen, eben weil die Abbildung topologisch möglich ist. Hingegen wird sich die funktionentheoretische Unmöglichkeit alsbald herausstellen. In der Tat, durch die hypothetische Abbildung von F' auf F wird auf F' eine eindeutige reguläre Funktion $f(z)$ definiert, indem jedem Punkte A' von F' der z-Wert des Bildpunktes A auf F als Funktionswert zugeordnet wird. Diese Funktion hat in F' genau eine Nullstelle, und wir können die Umgebung U von P' so wählen, daß in U die Funktion nicht verschwindet. Betrachten wir $f(z)$ in G, so ersehen wir, daß $f(z)$ unendlich wird in jedem Randpunkte von G, welcher in U liegt. Wenden wir auf $\frac{1}{f(z)}$ unseren Hilfssatz an, so ergibt sich, daß $\frac{1}{f(z)}$ identisch verschwinden muß, was ganz undenkbar ist.

Damit ist die Existenz von offenen Riemannschen Flächen erwiesen, welche in keiner Weise fortgesetzt werden können, wobei diese Unmöglichkeit nicht bereits durch topologische Überlegungen erschlossen werden kann.

Jena, den 1. Dezember 1922.

(Eingegangen am 12. Dezember 1922.)

Das Volumen in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit und seine Invarianteneigenschaft[1]).

Von

Otto Hölder in Leipzig.

Bereits Lobatschefskij hat Inhalte von Flächen und Volumina von Raumteilen in der hyperbolischen Geometrie bestimmt. Der Umstand, daß ein Körper auf verschiedene Weise zerschnitten werden kann, führte ihn dabei auf Gleichungen zwischen gewissen bestimmten Integralen. Man konnte damals zweifeln, ob diese Gleichungen im Sinne der Analysis als bewiesen anzusehen seien, wie andererseits Lobatschefskij die genannten Ergebnisse da, wo sie verifiziert werden konnten, als Bestätigungen der Richtigkeit der Grundlagen seiner Geometrie angesehen hat[2]).

Offenbar sind diese Ergebnisse strenge erwiesen, sobald man im Besitze eines solchen Beweises der Widerspruchslosigkeit der hyperbolischen Geometrie ist, der die Beziehungen des Flächeninhalts und des Volumens mit einbegreift. Es hat H. Liebmann bereits darauf hingewiesen[3]), daß mit Rücksicht auf eine Abbildung der nichteuklidischen Geometrie auf die euklidische gewisse Eigenschaften des Integrals

$$\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{z^3}$$

das in der genannten Hinsicht Nötige enthalten; das entsprechende, auf die zweifache Mannigfaltigkeit sich beziehende Integral war schon von

[1]) Der Inhalt dieses Aufsatzes bildete den Gegenstand eines 1922 auf der Naturforscherversammlung in Leipzig gehaltenen Vortrags (vgl. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung **31**, S. 99).

[2]) Vgl. N. J. Lobatschefskijs Imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale, übersetzt von H. Liebmann (Abhandlungen zur Geschichte der Math. Wiss. mit Einschluß ihrer Anwendungen, 19. Heft), 1904, S. 92.

[3]) A. a. O. im Vorwort S. VII; vgl. ferner H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie (Sammlung Schubert XLIX), 1905, S. 63.

Poincaré aufgestellt worden[4]). Für die allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeiten ist der Begriff des Volumens und des Flächeninhalts noch nicht durchgeführt.

§ 1.

Geodätische Linien. Senkrechtstehen.

Es stelle jetzt das System der n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit dar, in der das unendlich kleine Abstandsquadrat durch die Formel .

$$(1) \qquad ds^2 = \sum_{i,k=1,2,\ldots,n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k = \Omega(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$$

vorgestellt ist. Dabei bedeutet natürlich Ω eine positiv definite quadratische Form der Differentiale

$$dx_i = \bar{x}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

nd es sind die Koeffizienten

$$(2) \qquad a_{ik} = a_{ki}$$

der Form als Funktionen der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu denken.

Die Formel (1) gestattet bekanntlich, mit Rücksicht auf die Analogie, die zwischen den Eigenschaften geometrischer Gebilde und zwischen gewissen Aufgaben der Analysis besteht, den Begriff der geodätischen Linie einer Riemannschen Mannigfaltigkeit und den Begriff des Aufeinandersenkrechtstehens zweier Linienelemente zu definieren. Nachdem nämlich die Länge einer beliebigen Linie durch das zwischen den Endpunkten geführte Integral

$$(3) \qquad \int ds = \int \sqrt{\Omega}$$

erklärt ist, hat man sich nur von einem festen „Punkt“ [1] der Mannigfaltigkeit aus eine Linie gezogen zu denken, deren Endpunkt [0] auf einer vorgegebenen Linie verschieblich ist. Wird jetzt die gezogene Linie einschließlich ihres Endpunktes etwas verändert, so gibt die Variationsrechnung für die Änderung der Länge der Linie (unter Vernachlässigung der Größen höherer Ordnung) den Betrag

$$\delta \int_{[0]}^{[1]} ds = \frac{1}{2} \int_{[0]}^{[1]} \frac{\delta \Omega}{\sqrt{\Omega}};$$

das letzte Integral geht aber durch die partielle Integration von Lagrange in den Ausdruck

[4]) Acta Mathematica 1 (1882), S. 8.

$$4)\quad \left[\frac{\frac{\partial\Omega}{\partial\bar{x}_1}}{\sqrt{\Omega}}\delta x_1+\frac{\frac{\partial\Omega}{\partial\bar{x}_2}}{\sqrt{\Omega}}\delta x_2+\dots\right]_{[0]}^{[1]}+\int_{[0]}^{[1]}\left\{\left(\frac{\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}}{\sqrt{\Omega}}-d\frac{\frac{\partial\Omega}{\partial\bar{x}_1}}{\sqrt{\Omega}}\right)\delta x_1+\left(\frac{\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}}{\sqrt{\Omega}}-d\frac{\frac{\partial\Omega}{\partial\bar{x}_2}}{\sqrt{\Omega}}\right)\delta x_2+\dots\right\}$$

über. Verlangt man nun, daß die gezogene Linie eine kürzeste sein soll, und hält man dabei zunächst den Punkt [0] fest, so ergibt das Nullsetzen des Ausdrucks in der geschweiften Klammer in bekannter Weise die Differentialgleichungen der geodätischen Linien. Denkt man sich andererseits dabei den Punkt [0] auf der vorgegebenen Linie verschoben, während die Linie [1] — [0] selbst den Differentialgleichungen bereits genügen soll, so ergibt der in (4) vor dem Integral stehende Ausdruck eine Bedingung

$$(5)\qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Omega}{\partial\bar{x}_i}\delta x_i=0,$$

die wir für die Bedingung des „Senkrechtstehens" des Endelements $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ der Linie [1] — [0] auf der Verschiebung $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$ erklären [5]).

§ 2.

Grundgedanke der Definition des Volumens.

Um nun auf die Definition des Volumens für die Riemannschen Mannigfaltigkeiten zu kommen, bedenke man, daß man in einer solchen von einem *unendlich kleinen* Parallelepiped und zwar mit Rücksicht auf die Bedingung (5) auch von einem solchen sprechen kann, dessen Kanten miteinander rechte Winkel bilden. Als Ausgangspunkt für die gesuchte Definition liegt es nun nahe, den Inhalt eines unendlich kleinen rechtwinkligen Parallelepipeds einfach durch das Produkt der Kanten zu erklären, wie dies auch z. B. Killing in dem speziellen Fall der beiden nichteuklidischen Geometrien getan hat [6]). Für irgendeinen gegebenen

[5]) Man kann auch für ein unendlich kleines Dreieck aus den Punkten $x_1, x_2, \dots$: $x_1+\bar{x}_1, x_2+\bar{x}_2, \dots$; $x_1+\delta x_1, x_2+\delta x_2, \dots$ den an der erstgenannten Ecke liegenden Winkel dadurch definieren, daß man für diesen Winkel den gewöhnlichen Kosinussatz der Trigonometrie fordert. Setzt man den Winkel dann gleich einem Rechten, so ergibt sich wieder die Bedingung (5) für das Senkrechtstehen.

[6]) Vgl. die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung (1885) S. 85–87. Killing betrachtet, neben dem ebenen Fall, die der hyperbolischen und der elliptischen Geometrie entsprechenden Mannigfaltigkeiten n-ter Dimension. Es ist jedoch von ihm keine wirkliche Begründung des Volumbegriffs gegeben worden. Er beschränkt sich auf den Hinweis darauf, daß ein in Analogie mit der gewöhnlichen Geometrie in Weierstraßschen Koordinaten für ein unendlich kleines Parallelepiped gebildeter Determinantenausdruck sich invariant verhält für den Fall, daß der Übergang zu einem anderen Weierstraßschen Koordinatensystem gemacht

Teil unserer Mannigfaltigkeit ist das Volumen nun dadurch zu definieren, daß man diesen Teil in unendlich viele unendlich kleine rechtwinklige Parallelepipede unterteilt und dann die Summe der unendlich vielen unendlich kleinen Kantenprodukte bildet. Zur völligen Begründung des Volumbegriffes der Riemannschen Mannigfaltigkeit ist also nur nötig, daß die Unabhängigkeit des als Summe von unendlich vielen unendlich kleinen Größen bezeichneten Grenzwertes von der Art der Teilung gezeigt wird; außerdem ist aber die Möglichkeit einer Teilung in unendlich kleine *rechtwinklige* Parallelepipede nicht selbstverständlich und muß bewiesen werden. Die so bezeichneten Beweise würden ziemlich umständlich ausfallen, wenn unseren Absichten nicht durch die Begründung des Volumbegriffs in den n-einfachen *ebenen* Mannigfaltigkeiten bereits vorgearbeitet wäre. In dieser Hinsicht sind die mehr formalen Entwicklungen bereits von O. Schlömilch[7]) gegeben worden; dieser hat für das mehrfache Integral, d. h. für die durch mehrmaliges einfaches Integrieren definierte Größe, diejenige Invarianz nachgewiesen, die für die Begründung des Volumbegriffs der gewöhnlichen, d. h. „ebenen", Mannigfaltigkeit erfordert wird. Die feineren infinitesimalen Betrachtungen, die durch die Verhältnisse an der Grenze des Gebiets notwendig werden, dessen Volumen bestimmt werden soll, indem die das in Frage stehende Gebiet mehr und mehr annähernden, gestaffelten Gebiete die Grenze überschneiden, sind neuerdings durch Carathéodory und Erhard Schmidt[8]) nachgeliefert worden.

§ 3.

Rechtwinkliges Parallelepiped.

Nachdem also das Volumen der ebenen Mannigfaltigkeit begründet ist, kann der hier beabsichtigte Nachweis verhältnismäßig einfach geführt werden. Die Formeln sollen für den Fall einer dreifachen Mannigfaltigkeit x, y, z ausführlich gegeben werden; man erkennt ohne weiteres die Allgemeingültigkeit des Beweisverfahrens für den Fall der n-fachen

wird; damit ist aber noch nicht gezeigt, daß für ein beliebiges endliches Gebiet, das in unendlich kleine Parallelepipede geteilt wird, die Summe der betreffenden Werte sich als unabhängig von der Art der Teilung erweist.

[7]) Vgl. Kompendium der höheren Analysis 2, 3. Aufl., (1879), S. 498 ff.

[8]) Vgl. C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen (1918), S. 229 ff., E. Schmidt, Mathematische Zeitschrift **12** (1922), S. 298 ff. Ähnliche Betrachtungen wären, strenge genommen, auch den im Texte gegebenen Entwicklungen noch hinzuzufügen; der Leser wird im Anschluß an die eben erwähnten Schriften die Entwicklungen zu ergänzen vermögen, falls er über die vorgegebenen Funktionen a_{ik} von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und über die Grenze des in der *ebenen* Mannigfaltigkeit zugrunde gelegten Gebietes die nötigen Annahmen macht.

Mannigfaltigkeit. Denkt man sich nun ausgehend von einer Stelle x_0, y_0, z_0 drei unendlich kleine Linienelemente

$$\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{6}$$

so ist durch die Wertsysteme

$$\begin{gathered} x_0 + \theta_1 \bar{x}_1 + \theta_2 \bar{x}_2 + \theta_3 \bar{x}_3, \qquad y_0 + \theta_1 \bar{y}_1 + \theta_2 \bar{y}_2 + \theta_3 \bar{y}_3, \\ z_0 + \theta_1 \bar{z}_1 + \theta_2 \bar{z}_2 + \theta_3 \bar{z}_3, \end{gathered} \tag{7}$$

in denen die Größen θ_1, θ_2 und θ_3 unabhängig voneinander die Zahlwerte von 0 bis 1 durchlaufen, ein unendlich kleines Parallelepiped gegeben. Dieses ist nach (5) rechtwinklig, wenn noch die Gleichungen

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial \bar{x}_i} \bar{x}_k + \frac{\partial \Omega_i}{\partial \bar{y}_i} \bar{y}_k + \frac{\partial \Omega_i}{\partial \bar{z}_i} \bar{z}_k = 0 \qquad (i \gtrless k) \tag{8}$$

bestehen; dabei ist zur Abkürzung Ω_i für $\Omega(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ gesetzt. Betrachtet man andererseits jetzt die Wertsysteme (7) in der gewöhnlichen, d. h. ebenen Mannigfaltigkeit x, y, z,[9]) so stellen dieselben hier auch ein unendlich kleines Parallelogramm vor, das aber nicht rechtwinklig zu sein braucht, und dessen Inhalt gleich der Determinante

$$\begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & \bar{z}_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & \bar{z}_2 \\ \bar{x}_3 & \bar{y}_3 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} \tag{9}$$

ist.

Für das rechtwinklige Parallelepiped der Riemannschen Mannigfaltigkeit sollte das Kantenprodukt

$$\sqrt{\Omega_1} \cdot \sqrt{\Omega_2} \cdot \sqrt{\Omega_3} \tag{10}$$

als Maßzahl betrachtet werden. Es wird nun gleich nachher gezeigt werden, daß das Verhältnis der beiden zuletzt genannten Inhalte (10) und (9)

$$W = \frac{\sqrt{\Omega_1}\sqrt{\Omega_2}\sqrt{\Omega_3}}{|\bar{x}_i \bar{y}_i \bar{z}_i|_{(i=1,2,3)}} \tag{11}$$

eine *nur von der Stelle x_0, y_0, z_0, aus der unser Parallelepiped konstruiert ist, abhängige,* aber von den drei unendlich kleinen, aufeinander rechtwinkligen und im übrigen beliebigen Vektoren (6) gänzlich unabhängige Größe ist. Dies aber genügt, um zu zeigen, daß der oben genannte Grenzwert existiert und gleich dem über die ebene Mannigfaltigkeit erstreckten Integral

$$\int |W| \, d\tau$$

[9]) D. h. in der Mannigfaltigkeit, in der $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ist, und in der die geodätischen Linien durch lineare Gleichungen dargestellt werden.

ist, vorausgesetzt, daß überhaupt die Einteilung in die rechtwinkligen Parallelepipede möglich ist.

Um nun die Unabhängigkeit des Ausdrucks W von den $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ zu zeigen, bilden wir W^2 und erweitern dann den Bruch mit der Determinante

$$\left| \frac{\partial \Omega_i}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \bar{y}_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \bar{z}_i} \right|_{(i=1,2,3)}. \tag{12}$$

Diese Determinante läßt sich nämlich, ausführlich geschrieben, in die Form

$$8 \cdot \left| a_{11}\bar{x}_i + a_{12}\bar{y}_i + a_{13}\bar{z}_i, \quad a_{21}\bar{x}_i + a_{22}\bar{y}_i + a_{23}\bar{z}_i, \quad a_{31}\bar{x}_i + a_{32}\bar{y}_i + a_{33}\bar{z}_i \right|$$

setzen, welche sofort vermöge des Determinantenmultiplikationssatzes das Produkt

$$8 \cdot |a_{ik}| \cdot |\bar{x}_i \bar{y}_i \bar{z}_i| \tag{13}$$

ergibt. Multipliziert man jetzt in dem Ausdruck

$$W^2 = \frac{\Omega_1 \cdot \Omega_2 \cdot \Omega_3}{|\bar{x}_i \bar{y}_i \bar{z}_i| \cdot |\bar{x}_i \bar{y}_i \bar{z}_i|} \tag{14}$$

den *einen* Faktor des Nenners mit (12), so ergibt sich nach dem Multiplikationssatz eine Determinante, deren Diagonalelemente wegen des Theorems von den homogenen Funktionen sind: $2\Omega_1$, $2\Omega_2$, $2\Omega_3$, während die übrigen Elemente nach Formel (8) gleich Null sind. Das genannte Produkt ist also

$$|\bar{x}_i \bar{y}_i \bar{z}_i| \cdot \left| \frac{\partial \Omega_i}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \bar{y}_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \bar{z}_i} \right| = \begin{vmatrix} 2\Omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\Omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\Omega_3 \end{vmatrix} = 8\,\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3.$$

Indem man nun im Ausdruck (14) den Nenner mit (12), den Zähler aber mit dem gleichwertigen Produkt (13) multipliziert, erkennt man, daß

$$W^2 = |a_{ik}| = D,$$

d. h. gleich der Determinante (Diskriminante) der quadratischen Form Ω, also von den $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ wirklich unabhängig ist. Das im gewöhnlichen Sinn zu verstehende dreifache Integral

$$\iiint |\sqrt{D}|\, dx\, dy\, dz \tag{15}$$

stellt somit das Volumen des betreffenden Teils der Riemannschen Mannigfaltigkeit dar.

§ 4.

Möglichkeit der Teilung in rechtwinklige Parallelepipede.

Die gegebenen Rechnungen sind, wie schon bemerkt, von der Zahl n der die Mannigfaltigkeit darstellenden Variablen unabhängig. Nun ist aber noch die Möglichkeit der Einteilung unseres Gebiets in unendlich

kleine rechtwinklige Parallelepipede zu beweisen. Es läge natürlich nahe, dazu n Flächensysteme verwenden zu wollen, die sich gegenseitig orthogonal schneiden. Da jedoch die Bildung solcher orthogonaler Flächensysteme von der Lösung von $\frac{n(n-1)}{2}$ partiellen Differentialgleichungen mit n gesuchten Funktionen abhängig sein würde, so vermutet man aus dieser Abzählung von vornherein, daß für $n > 3$ die gesuchten Flächensysteme im allgemeinen nicht mehr möglich sein werden. Man kann sich aber doch von der Möglichkeit überzeugen, das Gebiet in anderer Weise in unendlich viele, unendlich kleine *rechtwinklige* Parallelepipede zu zerlegen.

Am einfachsten wird man zu diesem Zweck annehmen, daß die Möglichkeit der gewünschten Teilung für die $n-1$-fache Mannigfaltigkeit bereits erwiesen sei, wie sie sich ja für die zweifache Mannigfaltigkeit aus einer Linienschar und deren orthogonalen Trajektorien von selbst ergibt. Man wähle jetzt aus einer „Flächenschar"

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{konst.} \tag{16}$$

eine Folge von Flächen

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= c' \\ F(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= c'' \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{17}$$

die durch den betrachteten Teil der n-fachen Mannigfaltigkeit hindurchgehen, so aus, daß jede Fläche der Folge von der vorangehenden wenig verschieden ist. Man kann nun nach der gemachten Annahme die erste der Flächen (17) in kleine rechtwinklige Parallelepipede $n-1$-ter Dimension teilen, ebenso davon unabhängig die zweite der Flächen (17), dann ebenso die dritte, unabhängig von der ersten und zweiten, usf. Zieht man jetzt durch die Ecken der in einer der Flächen (17) ausgeführten senkrechten Teilung Linienstücke, die auf der Fläche senkrecht stehen[10]) und etwa als Stücke senkrechter Trajektorien der Schar (16) genommen werden

---

[10]) Stellen die Größen $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$ ein kleines in einer der Flächen (16) gelegenes Linienelement vor, so hat man an der betreffenden Stelle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i = 0. \tag{18}$$

Soll nun das kleine Element $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ in dieser Stelle auf der Fläche senkrecht stehen, so muß es zusammen mit allen den der Gleichung (18) entsprechenden Wertsystemen $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$ der Bedingung (5) des Senkrechtstehens genügen. Hieraus ergibt sich aber

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{x}_1} : \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{x}_2} : \ldots : \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{x}_n} = \frac{\partial F}{\partial x_1} : \frac{\partial F}{\partial x_2} : \ldots : \frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

(Fortsetzung der Fußnote auf der nächsten Seite.)

können, *die aber nur bis zu der jedesmal nächstfolgenden von den Flächen* (17) *sich erstrecken*, so ergibt sich für das vorliegende Stück der n-fachen Mannigfaltigkeit eine Teilung in kleine rechtwinklige Parallelepipede n-ter Dimension[11]).

§ 5.

Einzigkeit der Volumbestimmung. Invarianz.

Der so definierte und durch die Formel (15) dargestellte Volumbegriff besitzt, wie man nach einiger Überlegung erkennt, die folgenden Eigenschaften:

a) Falls ein Gebiet durch Zusammensetzung gebildet ist, ist die demselben zugeordnete Inhaltszahl die Summe der den einzelnen Gebieten zugeordneten Zahlen.

b) Unendlich kleinen Gebieten, die einander kongruent[12]) sind, entsprechen gleiche Zahlen.

Man überzeugt sich auch davon, daß jede diesen beiden Eigenschaften entsprechende Zahlenverteilung über die Gebiete sich von der definierten höchstens um eine multiplikative Konstante unterscheiden kann. Vermöge der Verfügung über diese Konstante kann man irgendein gewähltes Gebiet zur Einheit der Volumina machen.

Ausführlicher geschrieben heißt diese Gleichung, mit Rücksicht darauf, daß die $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Komponenten des auf der Fläche senkrecht stehenden Elements, d. h. die Differentiale der Koordinaten für den Fortgang senkrecht zur Fläche bedeuten:

$$(19)\qquad \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\,dx_i\Big) : \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{2i}\,dx_i\Big) : \ldots : \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ni}\,dx_i\Big) = \frac{\partial F}{\partial x_1} : \frac{\partial F}{\partial x_2} : \ldots : \frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

Dies sind also die Bedingungen für das Senkrechtstehen eines Linienelements auf einer der Flächen (16) und somit die Differentialgleichungen für die orthogonalen Trajektorien dieser Schar.

[11]) Um zu beweisen, daß die „Maschen" des so konstruierten n-dimensionalen „Netzes" *gleichzeitig* mit einer beliebig gewünschten Genauigkeit rechtwinkligen Parallelepipeden (vgl. die Ausdrücke (7)) angenähert werden können, indem sie zugleich hinreichend klein zusammengezogen werden, muß man natürlich außer für die Funktion F noch für die Funktionen a_{ik} der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gewisse Eigenschaften der Stetigkeit, beziehungsweise Differenzierbarkeit usw., fordern.

[12]) Der Begriff der Kongruenz setzt die Möglichkeit der Vergleichung von Winkeln voraus (vgl. die Anm. [5])). Von der Möglichkeit, ein kleines Gebilde näherungsweise kongruent an einer anderen Stelle der Mannigfaltigkeit oder an derselben Stelle „in einer anderen Orientierung" zu wiederholen, überzeugt man sich mit Hilfe der in § 6 auseinandergesetzten Transformation. Dieselbe führt das Abstandsquadrat in einen Ausdruck über, der an der Nullstelle der neuen Mannigfaltigkeit der Gleichung (25) entspricht (vgl. auch Riemann, Werke, 1. Aufl. 1876, S. 261, 2. Aufl. 1892, S. 279).

Wir können jetzt die in Frage stehende Riemannsche Mannigfaltigkeit dadurch neu darstellen, daß wir die Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in n neuen Größen $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ ausdrücken. Die Formel für das Quadrat des Linienelements geht dadurch in

$$ds^2 = \Omega'(\bar{x}_1', \bar{x}_2', \ldots, \bar{x}_n') = \sum_{i,k} a_{ik}' \bar{x}_i' \bar{x}_k'$$

über, wo nun die Größen a_{ik}' Funktionen von $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ sind und die $\bar{x}_1', \bar{x}_2', \ldots, \bar{x}_n'$ die Differentiale der letzten n Größen bedeuten sollen. Es folgt sowohl aus dem gewählten Inhaltsbegriff, als auch schon formal aus der Transformationsformel der mehrfachen Integrale und aus einer bekannten Eigenschaft der Determinante einer quadratischen Form, daß

$$(20) \qquad \int\int \ldots \int \sqrt{D}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \int\int \ldots \int \sqrt{D'}\, dx_1'\, dx_2' \ldots dx_n',$$

wenn

$$D = |a_{ik}|, \quad D' = |a_{ik}'| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Es ist also unser Volumbegriff oder, was dasselbe heißt, es ist das dem Integral (15) entsprechende n-fache Integral für jede beliebige Transformation invariant, hängt somit nur von den *inneren* Eigenschaften der Mannigfaltigkeit und nicht von deren Darstellung ab[13]).

§ 6.

Neue Begründung.

Man kann bei der Begründung des Volumbegriffs auch den gewissermaßen umgekehrten Weg gehen. Definiert man einfach das Volumen durch den Ausdruck (20), so ist zunächst einmal die Eigenschaft a) von § 5 erfüllt. Es handelt sich nun darum, zu beweisen, daß sich wirklich für ein unendlich kleines rechtwinkliges Parallelepiped als Wert des Volumens das Kantenprodukt ergibt, woraus dann alles übrige, auch die unter b) aufgeführte Eigenschaft, sich folgern läßt. Dabei kann man jetzt die Invarianz des Integrals (Formel (20)) benutzen, die sich ja rein formal zeigen läßt. Sind die n unendlich kleinen Vektoren, die aufeinander senkrecht stehen und die Kanten eines Parallelepipeds bilden sollen und die von der Stelle $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ausgehen, durch

$$(21) \qquad \bar{x}_{1k}, \bar{x}_{2k}, \ldots, \bar{x}_{nk} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

vorgestellt, so sind ihre Längen

$$\bar{s}_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_{ik}^2} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

[13]) Das Volumen ist also eine „Integralinvariante". Daß die Länge einer Linie und deshalb auch die Eigenschaft einer Linie eine „geodätische" zu sein (§ 1), ebenso die Größe eines Winkels (vgl. Anm. [5])) bei der Transformation invariant bleibt, ist eine unmittelbare Folge der Definitionen.

Ich setze jetzt[14])

$$\alpha_{ik} = \frac{\bar{x}_{ik}}{\bar{s}_k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

und führe n neue Variablen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein, die mit den ursprünglichen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch die Gleichungen

$$x_i = a_i + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} y_k \tag{22}$$

verbunden sind. Die Determinante

$$|\alpha_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

dieses linearen Gleichungssystems ist von Null verschieden[15]).

Man erkennt jetzt, daß die in der Mannigfaltigkeit der $y_1, y_2, \ldots, y_n$ vom Nullpunkt ausgehenden kleinen Vektoren

$$\begin{array}{ccccc} \bar{s}_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \bar{s}_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \bar{s}_3 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \bar{s}_n \end{array} \tag{23}$$

[14]) Im Grunde sind ja die Differentiale $x_{1k}, \bar{x}_{2k}, \ldots, x_{nk}, \bar{s}_k$ nichts anderes als *Verhältniszahlen.*

[15]) Wäre nämlich diese Determinante gleich Null, so könnte man n Zahlgrößen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ so finden, daß sie nicht sämtlich gleich Null wären und den Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} c_k x_{ik} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

genügten. Aus diesen Gleichungen folgte aber dann, daß auch

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Omega(\bar{x}_{1l}, \bar{x}_{2l}, \ldots, \bar{x}_{nl})}{\partial \bar{x}_{il}} - \sum_{k=1}^{n} c_k x_{ik} \right) = 0$$

sein müßte. Dies ist aber auch gleich

$$\sum_{k} \left(c_k \sum_{i} \frac{\partial \Omega(\bar{x}_{1l}, \bar{x}_{2l}, \ldots, \bar{x}_{nl})}{\partial \bar{x}_{il}} \bar{x}_{ik} \right).$$

Hier aber verschwinden wegen der gegenseitig senkrechten Lage der kleinen Vektoren (Gleichung (5)) alle diejenigen inneren Summen, für die $k \gtrless 1$ ist, und es bleibt von dem Ausdruck nur das Glied

$$c_l \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega(\bar{x}_{1l}, \bar{x}_{2l}, \ldots, \bar{x}_{nl})}{\partial \bar{x}_{il}} \bar{x}_{il} = 2 c_l \Omega(\bar{x}_{1l}, \bar{x}_{2l}, \ldots, \bar{x}_{nl})$$

übrig. Nun ist aber notwendig Ω, und wenigstens für einen der Werte l der Koeffizient c_l von Null verschieden, so daß man jedenfalls auf einen Widerspruch kommt. Es können somit auch die n kleinen Vektoren nicht einer nur $n-1$ fachen Mannigfaltigkeit angehören.

den in der Mannigfaltigkeit der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vom Punkt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ausgehenden Vektoren (21) entsprechen.

Wird nun für die Mannigfaltigkeit der $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der Ausdruck

$$\bar{s}^2 = \sum_{ik=1,2,\ldots,n} b_{ik}\, \bar{y}_i\, \bar{y}_k \tag{24}$$

für das Abstandsquadrat zugrunde gelegt, der aus (1) durch Transformation mit Hilfe der Gleichungen (22) hervorgeht, so erscheinen in der neuen Mannigfaltigkeit notwendig die vom Nullpunkt ausgehenden n Vektoren (23) aufeinander senkrecht. Dieser Umstand liefert aber, wenn die Bedingung (5) des Senkrechtstehens auf die neue quadratische Form (24) angewendet wird, für die Stelle $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$ die Gleichungen

$$b_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n;\ i \gtrless k).$$

Da andererseits z. B. der im y-System vom Nullpunkte ausgehende Vektor $\bar{s}_1, 0, 0, \ldots, 0$ dem im x-System von der Stelle $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ausgehenden Vektor $\bar{x}_{11}, \bar{x}_{21}, \ldots, \bar{x}_{n1}$ entsprach, und diese beiden somit dasselbe Maß bekommen müssen, so ergibt die Formel (24) noch, daß in dem Nullpunkt des y-Systems

$$\bar{s}_1^2 = b_{11}\, \bar{s}_1^2,$$

d. h.

$$b_{11} = 1$$

ist. Ganz in derselben Weise ist an dieser Stelle

$$b_{ii} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Formel (24) verwandelt sich also für $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$ in

$$\bar{s}^2 = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i^2, \tag{25}$$

und es ist die Determinante dieser Form gleich 1.

Nun folgt aus dem Invarianzcharakter des Integrals (20), daß das unendlich kleine rechtwinklige Parallelepiped im x-System dasselbe Volumen besitzt, wie das kleine Parallelepiped im y-System. Dieses Parallelepiped ist auch rechtwinklig, und da es seine Kanten in den Linien hat, in denen nur eine der Variablen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sich ändert (in den Achsen sozusagen), so ist für dieses *unendlich kleine* Parallelepiped das Volumenintegral

$$\int\int \ldots \int 1 \cdot dy_1\, dy_2 \ldots dy_n = \bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \ldots \bar{s}_n$$

unmittelbar auswertbar.

§ 7.

Besondere Arten der Auswertung. Inhalte von Teilmannigfaltigkeiten niedrigerer Dimension.

Obwohl der allgemeine Volumbegriff damit begründet ist, muß doch noch bewiesen werden, daß die von Lobatschefskij und anderen in der hyperbolischen Geometrie vorgenommenen einzelnen Volumbestimmungen sich diesem Begriff unterordnen; wenn dies gezeigt ist, ergibt sich von selbst, daß dabei solche Werte übereinstimmen müssen, die für dasselbe Gebiet auf verschiedenen Wegen ermittelt worden sind. In solchen Fällen, in denen von rechtwinkligen Parallelepipeden — oder im Fall der Flächeninhaltsbestimmung von Rechtecken — ausgegangen wird[16]), ist die Übereinstimmung mit dem oben gegebenen Inhaltsbegriff augenscheinlich. Andererseits wird es deutlich sein, daß die oben gegebene Begriffsbestimmung, die für *unendlich kleine* kongruente Gebiete und Figuren denselben Inhalt liefert, dies auch für endliche Gebiete und Figuren, die kongruent sind, tun muß in einer Mannigfaltigkeit, in der solche Kongruenz im Endlichen existiert. Also muß auch eine solche Bestimmung der Volumina und der Inhalte von Figuren mit der obigen übereinstimmen, bei der die Tatsache der Inhaltsgleichheit kongruenter Gebilde gewissermaßen als Axiom zugrunde gelegt, und die Bestimmung hauptsächlich auf das Hinzufügen und Wegnehmen kongruenter Gebilde gegründet wird[17]).

Auf unsere Volumbestimmung kommt es natürlich gleichfalls zurück, wenn das Gebiet n-ter Dimension durch äquidistante „Flächen“ $n-1$-ter Dimension in „Scheiben“ geteilt[18]), und das Volumen einer solchen Scheibe von unendlich kleiner Dicke — die senkrecht abgegrenzt sein mag — gleich dem Produkt aus dieser Dicke in die eine Seitenfläche genommen wird[19]).

---

[16]) Vgl. N. J. Lobatschefskijs Imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale, übersetzt von H. Liebmann, S. 56 und H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, S. 143.

[17]) Vgl. Liebmann an dem zuletzt angeführten Ort S. 69 ff. und die Formulierungen von Lobatschefskij in F. Engel u. P. Stäckel, Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie I, 1898, S. 34.

[18]) Errichtet man in den Punkten einer beliebigen Fläche senkrecht auf dieser (Gleichung (19)) geodätische Linien und schneidet auf allen diesen Linien dasselbe endliche Bogenstück ab, so erhält man eine die geodätischen Linien orthogonal durchsetzende äquidistante Fläche (vgl. z. B. den einfachen Beweis bei G. Darboux: Leçons sur la théorie générale des surfaces, II. partie, 1889, p. 507—510, vgl. auch L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, deutsch von M. Lukat, 1899, S. 570).

[19]) Vgl. auch das von Johann Bolyai unter anderen angewendete Verfahren (P. Stäckel, Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn 18, S. 305).

Man hat sich ja, um dies einzusehen, nur die Seitenfläche in kleine rechteckige Parallelepipede $n-1$-ter Dimension geteilt zu denken, wobei dann eine einfache Lage von Parallelepipeden n-ter Dimension zwischen den beiden äquidistanten Flächen $n-1$-ter Dimension entsteht. Die Summe aller Kantenprodukte, d. h. das Volumen der Scheibe, ist dann *gleich der Dicke multipliziert mit der Seitenfläche.* Diese Tatsache stellt also einen auf Grund der gegebenen Begriffsbestimmung beweisbaren Lehrsatz dar.

Wesentlich ist, daß bei dieser Überlegung die der Seitenfläche angehörenden Kanten in dieser genau so bemessen werden, wie sie vorher als Distanzen von Stellen der n-fachen Mannigfaltigkeit in dieser gemessen worden waren, und es setzt der genannte Lehrsatz mit Rücksicht auf diese Distanzmessung dieselbe Erklärung des Inhalts, die früher gegeben wurde, in der Seitenfläche voraus.

Man erhält also zwischen Volumen n-ter Dimension und einer in der n-fachen Mannigfaltigkeit enthaltenen „Fläche" $n-1$-ter Dimension eine der gewöhnlichen Raumgeometrie völlig entsprechende Beziehung, wenn man den Inhalt der Fläche $n-1$-ter Dimension auf die richtige Formel des Abstandsquadrats gründet. Man gewinnt diese Formel dadurch, daß man für die Fläche $n-1$ unabhängige Koordinaten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ einführt, die Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des in der Fläche gelegenen Punkts der n-fachen Mannigfaltigkeit in den ξ ausdrückt und durch Einführung dieser Ausdrücke die Formel des Abstandsquadrats

$$ds^2 = \sum_{ik=1,2,\ldots,n} a_{ik}\, dx_i dx_k$$

in

$$\sum_{ik=1,2,\ldots,n-1} \alpha_{ik}\, d\xi_i d\xi_k$$

umrechnet[20]).

---

[20]) Betrachtet man in dem durch rechtwinklige Koordinaten dargestellten gewöhnlichen Raum die Fläche $z = \varphi(x, y)$, so rechnet sich das Abstandsquadrat $dx^2 + dy^2 + dz^2$ für zwei benachbarte Punkte, die auf der Fläche liegen, falls auf dieser x und y als die beiden Koordinaten gewählt werden, in

$$\left(1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right) dx^2 + 2\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx\, dy + \left(1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right) dy^2$$

um. Die Determinante dieser quadratischen Form ist

$$D = \begin{vmatrix} 1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} & 1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \end{vmatrix}.$$

Hieraus ergibt sich sofort die elementare Komplanationsformel

$$\iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Man kann nun in der „Fläche", d. h. in der Mannigfaltigkeit $n-1$-ter Dimension, wieder eine Mannigfaltigkeit von nur $n-2$-ter Dimension annehmen und die Betrachtung wiederholen. Man erhält deshalb durch die angegebene Regel der Umrechnung des Abstandsquadrats für jede in der ursprünglichen n-fachen Mannigfaltigkeit enthaltene Mannigfaltigkeit niedrigerer Dimension eine in das ganze Maßsystem der n-fachen Mannigfaltigkeit hineinpassende Inhaltsbestimmung. Für eine nur einfache Mannigfaltigkeit kommt man dann natürlich auf die ursprüngliche Längenbestimmung einer Linie in der n-fachen Mannigfaltigkeit zurück.

(Eingegangen am 4. Juni 1923.)

Über die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie.

Von

Leon Lichtenstein in Leipzig.

Sei T ein beschränktes, von einer endlichen Anzahl geschlossener, analytischer und regulärer Flächen, die einander weder schneiden noch berühren, begrenztes Gebiet in dem Raume der kartesischen Koordinaten x, y, z. Die Gesamtheit der Randflächen wird im folgenden mit S bezeichnet[1]). Den Bereich $T+S$ denken wir uns von einem homogenen, isotropen elastischen Medium erfüllt. Die Laméschen Elastizitätskonstanten des Mediums heißen λ und μ, die Komponenten der unendlich kleinen Verrückung desjenigen Punktes, dessen Koordinaten im natürlichen Zustande die Werte x, y, z haben, heißen u, v, w. Die Volumdilatation ist dann $\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$.[2])

Der Einfachheit halber wird im folgenden angenommen, daß auf den Körper keinerlei Massenkräfte wirken. Der allgemeinere Fall nicht verschwindender Massenkräfte ließe sich, wie man leicht sehen wird, in genau derselben Weise erledigen, die Formeln würden lediglich ein wenig komplizierter ausfallen. Übrigens kann man auch, wie man weiß, den allgemeineren Fall auf den vorerwähnten speziellen zurückführen.

Bei der ersten Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie handelt es sich um die Bestimmung derjenigen in $T+S$ stetigen Funktionen u, v, w,

[1]) Die obigen Voraussetzungen bezüglich S sind nur der Einfachheit halber eingeführt worden. Sie ließen sich natürlich durch andere weniger einschränkende ersetzen.

[2]) Wir schließen uns der in den Artikeln der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften IV 24 und IV 25 von O. Tedone sowie O. Tedone und A. Timpe gebrauchten Bezeichnungsweise an (vgl. a. a. O. S. 58–59 sowie S. 67). Es gilt $3\lambda + 2\mu > 0$, $\mu > 0$. Der Elastizitätsmodul und die Poissonsche Konstante sind

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \qquad \eta = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \qquad -1 < \eta < \frac{1}{2}.$$

die in T stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben und die Differentialgleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta u = -\dfrac{\lambda+\mu}{\mu}\dfrac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \Delta v = -\dfrac{\lambda+\mu}{\mu}\dfrac{\partial \Theta}{\partial y}, \\ \Delta w = -\dfrac{\lambda+\mu}{\mu}\dfrac{\partial \Theta}{\partial z}, \end{cases} \qquad \Theta = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

erfüllen, wenn darüber hinaus bekannt ist, daß sie auf S vorgeschriebene stetige Werte annehmen.

Bekanntlich kann die so formulierte Aufgabe gewiß nicht mehr als eine Lösung haben[3]). Daß unter gewissen Voraussetzungen bezüglich der Randfunktionen das Problem tatsächlich eine Lösung hat, ist zuerst allgemein von Herrn A. Korn gezeigt worden[4]).

Herr Korn bedient sich der Methode der sukzessiven Approximationen. Ein anderer Existenzbeweis, der von der Theorie der linearen Integralgleichungen Gebrauch macht, ist von Herrn Fredholm, von Lauricella und von Herrn Marcolongo ausgebildet worden. Man bedient sich hierbei eines Verfahrens, das dem Neumann-Fredholmschen Verfahren zur Auflösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie analog ist[5]).

In den folgenden Zeilen wird für die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie ein von dem vorhin genannten abweichendes Verfahren vorgeschlagen, das vielleicht nicht ganz ohne Interesse sein dürfte. Von

[3]) Vgl. etwa O. Tedone, loc. cit.[2]) S. 80–83.

[4]) Vgl. A. Korn, Abhandlungen zur Elastizitätstheorie. I. Allgemeine Lösung des elastischen Gleichgewichtsproblems bei gegebenen Verrückungen an der Oberfläche, Münchener Akademieberichte 1906, S. 37–80; Sur les équations de l'élasticité, Annales de l'École Normale **24** (1907), S. 9–75. Bezüglich weiterer Arbeiten von Herrn Korn, die sich mit anderen Grundproblemen der Elastizitätstheorie beschäftigen, vgl. A. Korn, Math. Annalen **75** (1914), S. 497–544 sowie Annaes di Academia Polytechnica do Porto **10** (1915), S. 1–28, wo sich weitere Literaturangaben finden. Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß Herr Korn ebenfalls als erster den Existenzbeweis der Lösung bei vorgegebenen Oberflächenspannungen (durch sukzessive Approximationen) durchgeführt hat.

[5]) Vgl. H. Weyl, Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Körpers, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **39** (1915), S. 1–50. Herr Weyl behandelt darüber hinaus an der bezeichneten Stelle mit Erfolg, als die zweite Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie, ein Problem, das in der elastischen Lichttheorie eine Rolle spielt, sowie, als die dritte Randwertaufgabe, die Bestimmung der Lösung bei vorgegebenen Oberflächenspannungen. Der eigentliche Zweck Weylscher Untersuchungen bildet übrigens die Ableitung asymptotischer Gesetze der elastischen Eigenschwingungen.

einem älteren Ansatze von Herrn Tedone ausgehend, wird für Θ eine lineare Integralgleichung abgeleitet. Ist diese gelöst, so gewinnt man u, v, w ohne jegliche Schwierigkeiten. Daß die Integralgleichung, auf die man geführt wird, der Fredholmschen Theorie zugänglich ist, folgt aus neueren Sätzen von Herrn P. Lévy über das Verhalten der klassischen Greenschen Funktion der Potentialtheorie am Rande ihres Definitionsgebietes[6]).

Aus (1) folgt in bekannter Weise, wenn angenommen wird, daß u, v, w im Innern von T stetige Ableitungen dritter Ordnung haben,

$$\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\Delta\Theta=0, \tag{2}$$

mithin

$$\Delta\Theta=0. \tag{3}$$

Für (1) kann man darum schreiben

$$\begin{cases} \Delta\left(u+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\Theta\right)=0, \\ \Delta\left(v+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}y\Theta\right)=0, \\ \Delta\left(w+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}z\Theta\right)=0. \end{cases} \tag{4}$$

Es mögen $u(\sigma)$, $v(\sigma)$, $w(\sigma)$ die vorgeschriebenen Randwerte von u, v, w in dem Punkte $(\xi, \eta, \zeta)=\sigma$ auf S bezeichnen. Sie seien so beschaffen, daß diejenigen in $T+S$ stetigen, in T regulären Potentialfunktionen, die auf S entsprechend gleich $u(\sigma)$, $v(\sigma)$, $w(\sigma)$ sind, in $T+S$ stetige Ableitungen erster Ordnung haben. Sei schließlich $G(x, y, z; x', y', z')$ die zu T gehörige klassische Greensche Funktion der Potentialtheorie. Ist speziell (x', y', z') der Punkt σ auf S, so wird der Einfachheit halber

$$G(x, y, z; x', y', z')=G(x, y, z; \sigma) \tag{5}$$

gesetzt.

Wir nehmen an, daß $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\Theta$ auch noch auf S stetig ist. Aus der ersten der Gleichungen (4) ergibt sich für alle (x, y, z) in T

$$\begin{aligned} &u(x, y, z)+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\Theta(x, y, z) \\ &=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\partial}{\partial n}G(x, y, z; \sigma)u(\sigma)d\sigma+\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_S\frac{\partial}{\partial n}G(x, y, z; \sigma)\xi\Theta(\sigma)d\sigma.\ ^{7}) \end{aligned} \tag{6}$$

[6]) Vgl. P. Lévy, Sur l'allure des fonctions de Green et de Neumann dans le voisinage du contour, Acta mathematica **42** (1919), S. 207–267.

[7]) In (6) ist unter $\Theta(\sigma)$ der Wert von Θ im Punkte σ auf S zu verstehen; das Symbol $\frac{\partial}{\partial n}G(x, y, z; \sigma)$ bezeichnet die Normalableitung in bezug auf die Ortsvariable (ξ, η, ζ).

Zwei ganz analoge Gleichungen gelten für $v(x, y, z)$ und $w(x, y, z)$ Beachtet man, daß wegen (3)

$$(7) \qquad \frac{\lambda+\mu}{2\mu} x\,\Theta(x, y, z) = \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_S \frac{\partial}{\partial n} G(x, y, z; \sigma)\, x\,\Theta(\sigma)\, d\sigma$$

ist, so kann man für (6) auch setzen

$$(8) \qquad \begin{aligned} u(x, y, z) = {} & \\ & \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n} G(x, y, z; \sigma) u(\sigma)\, d\sigma + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_S \frac{\partial}{\partial n} G(x, y, z; \sigma)(\xi - x)\,\Theta(\sigma)\, d\sigma \\ & = F_1(x, y, z) + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_S \frac{\partial}{\partial n} G(x, y, z; \sigma)(\xi - x)\,\Theta(\sigma)\, d\sigma. \end{aligned}$$

Dazu kommen zwei analoge Gleichungen (8′) und (8″) für $v(x, y, z)$ und $w(x, y, z)$. Die Funktion $F_1(x, y, z)$ und die analogen in den Formeln für $v(x, y, z)$ und $w(x, y, z)$ vorkommenden Funktionen $F_2(x, y, z)$ und $F_3(x, y, z)$ haben in $T + S$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Aus (8), (8′), (8″) folgt jetzt

$$(9) \qquad \begin{aligned} \Theta(x, y, z) = {} & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \\ = {} & \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_S \Big\{ \frac{\partial}{\partial x}\Big[(\xi - x)\frac{\partial}{\partial n} G(x, y, z; \sigma)\Big] \\ & + \frac{\partial}{\partial y}\Big[(\eta - y)\frac{\partial}{\partial n} G(x, y, z; \sigma)\Big] + \frac{\partial}{\partial z}\Big[(\zeta - z)\frac{\partial}{\partial n} G(x, y, z; \sigma)\Big]\Big\}\,\Theta(\sigma)\, d\sigma \\ = {} & \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} - \frac{3(\lambda+\mu)}{2\mu}\Theta(x, y, z) + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_S \Big\{(\xi - x)\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial n} \\ & + (\eta - y)\frac{\partial^2 G}{\partial y\,\partial n} + (\zeta - z)\frac{\partial^2 G}{\partial z\,\partial n}\Big\}\,\Theta(\sigma)\, d\sigma. \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(10) \qquad \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \Lambda(x, y, z)$$

und bezeichnet man den von (x, y, z) in T nach $(\xi, \eta, \zeta) = \sigma$ auf S weisenden Vektor mit ϱ, so findet man wege n

$$(11) \qquad (\xi - x)\frac{\partial}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial}{\partial z} = \varrho\frac{\partial}{\partial \varrho}$$

[8]) Vgl. O. Tedone, loc. cit. [2]), S. 101.

endgültig

$$(12)\quad \Theta(x,y,z) = \frac{2\mu}{3\lambda+5\mu}\Lambda(x,y,z) + \frac{\lambda+\mu}{4\pi(3\lambda+5\mu)}\int_S \varrho\frac{\partial^2 G}{\partial\varrho\,\partial n}\Theta(\sigma)\,d\sigma.$$

Um das Verhalten der Funktion $\varrho\frac{\partial^2 G}{\partial\varrho\,\partial n}$ übersichtlich darzustellen, bedienen wir uns vorübergehend mit Herrn P. Lévy eines kartesischen Koordinatensystems ξ, η, ζ, dessen positive ζ-Achse die Richtung der Innennormale (n) im Punkte σ hat, während die ξ- und η-Achsen die Krümmungslinien in σ berühren. Die Gleichung von S kann man in einer gewissen Umgebung von σ in der Form

$$(13)\quad \zeta = \frac{1}{2}(a_1\xi^2 + a_2\eta^2) + \frac{1}{6}(b_0\xi^3 + b_1\xi^2\eta + b_2\xi\eta^2 + b_3\eta^3) + \ldots$$

darstellen; $\frac{1}{a_1}$ und $\frac{1}{a_2}$ sind die Hauptkrümmungsradien in σ. Dann gilt nach Herrn P. Lévy

$$(14)\quad \frac{\partial}{\partial n}G(\xi,\eta,\zeta;\sigma) = \frac{2\zeta}{\varrho^3} - \frac{a_1+a_2}{2}\frac{1}{\varrho} - \frac{a_1-a_2}{2}\frac{\xi^2-\eta^2}{\varrho(\varrho+\zeta)^2} + Q(\xi,\eta,\zeta;\sigma)\ [9]$$

$$(\varrho^2 = \xi^2+\eta^2+\zeta^2).$$

Die Funktion $Q(\xi,\eta,\zeta;\sigma)$ hat, außer in σ selbst, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf ξ, η, ζ. Diese werden bei der Annäherung an σ wie $\frac{1}{\varrho}$ unendlich.

Für

$$(15)\qquad \varrho\frac{\partial^2 G}{\partial\varrho\,\partial n} = \varrho\frac{\partial^2 G(\xi,\eta,\zeta;\sigma)}{\partial\varrho\,\partial\zeta}$$

erhält man jetzt leicht den Ausdruck

$$(16)\quad \varrho\frac{\partial^2 G}{\partial\varrho\,\partial n} = -\frac{4\zeta}{\varrho^3} + Q_1(\xi,\eta,\zeta;\sigma) = -4\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\varrho}\right) + Q_1(\xi,\eta,\zeta;\sigma).$$

Die Funktion Q_1 ist beschränkt.

Betrachten wir jetzt den Ausdruck

$$(17)\qquad P(x,y,z) = \int_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\Theta(\sigma)\,d\sigma.$$

Nach bekannten Sätzen ist, wenn $\bar\sigma$ einen beliebigen Punkt auf S, $\bar\varrho$ den von $\bar\sigma$ nach σ weisenden Vektor bezeichnen,

$$(18)\qquad P(\bar\sigma) = 2\pi\Theta(\bar\sigma) + \int_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\bar\varrho}\right)\Theta(\sigma)\,d\sigma.$$

[9]) Vgl. P. Lévy, loc. cit. [6]), S. 242—262, insb. S. 255—257.

Aus (12), (16), (17), (18) folgt jetzt

$$(19)\quad \Theta(\bar\sigma)=\frac{2\mu}{3\lambda+5\mu}\Lambda(\bar\sigma)+\frac{\lambda+\mu}{4\pi(3\lambda+5\mu)}\left\{-8\pi\Theta(\bar\sigma)+\int_S \varrho\frac{\partial^2 G}{\partial\bar\varrho\,\partial n}\Theta(\sigma)\,d\sigma\right\}$$

oder

$$(20)\qquad \Theta(\bar\sigma)=\frac{2\mu}{5\lambda+7\mu}\Lambda(\bar\sigma)+\frac{\lambda+\mu}{4\pi(5\lambda+7\mu)}\int_S \varrho\frac{\partial^2 G}{\partial\bar\varrho\,\partial n}\Theta(\sigma)\,d\sigma.$$

Der Kern $\varrho\frac{\partial^2 G}{\partial\bar\varrho\,\partial n}$ wird für $\bar\sigma\to\sigma$ wie $\frac{1}{\varrho}$ unendlich. Die Integralgleichung (20) ist also der Fredholmschen Theorie zugänglich.

Es möge die nichthomogene Integralgleichung für alle $\Lambda(\sigma)$ lösbar sein. Wie sich bald zeigen wird, ist dies tatsächlich immer der Fall. Sei $\Theta(\sigma)$ die Lösung von (20) und es möge $\Theta(x,y,z)$ die durch die Gleichung (12) erklärte Funktion bezeichnen. Augenscheinlich ist $\Theta(x,y,z)$ in $T+S$ stetig und auf S gleich $\Theta(\sigma)$. Wir beweisen, daß $\Theta(x,y,z)$ eine in T reguläre Potentialfunktion ist.

Da $\Delta\Lambda=0$ ist, so genügt es offenbar zu zeigen, daß

$$(21)\qquad \mathsf{M}(x,y,z)=\int_S \varrho\frac{\partial^2 G}{\partial\varrho\,\partial n}\Theta(\sigma)\,d\sigma$$

in T die Laplacesche Differentialgleichung erfüllt. Es sei vorübergehend $\Psi(x,y,z)$ diejenige in $T+S$ stetige, in T reguläre Potentialfunktion, die auf S gleich $\Theta(\sigma)$ ist. Es ist dann

$$(22)\qquad x\Psi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n}G(x,y,z;\sigma)\,x\,\Theta(\sigma)\,d\sigma.$$

Anderserseits ist wegen $\Delta(x\Psi)=2\frac{\partial\Psi}{\partial x}$, wie man leicht sieht,

$$(23)\qquad \begin{aligned} x\Psi(x,y,z)=&-\frac{1}{2\pi}\int_T G(x,y,z;x',y',z')\frac{\partial\Psi}{\partial x'}\,dx'\,dy'\,dz'\\ &+\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n}G(x,y,z;\sigma)\,\xi\,\Theta(\sigma)\,d\sigma\ ^{10})\end{aligned}$$

und darum

$$(24)\quad \frac{1}{2\pi}\int_T G(x,y,z;x',y',z')\frac{\partial\Psi}{\partial x'}\,dx'\,dy'\,dz'=\frac{1}{4\pi}\int_S(\xi-x)\frac{\partial}{\partial n}G(x,y,z;\sigma)\,\Theta(\sigma$$

[10]) Wie man durch teilweise Integration leicht verifiziert, hat das erste Integral rechterhand eine bestimmte Bedeutung, obwohl $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ auf S nicht zu existieren braucht. (Vgl. die Fußnote [11]).

Aus (24) und den beiden analogen Formeln folgt weiter

$$\mathsf{N} = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int_T G\frac{\partial \Psi}{\partial x'}dx'dy'dz' + \frac{\partial}{\partial y}\int_T G\frac{\partial \Psi}{\partial y'}dx'dy'dz' + \frac{\partial}{\partial z}\int_T G\frac{\partial \Psi}{\partial z'}dx'dy'dz'\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_S \varrho\frac{\partial^2 G}{\partial \varrho\,\partial n}\Theta(\sigma)\,d\sigma - 3\Psi(x,y,z).\ ^{11})$$

Jetzt ist nun

$$\Delta\mathsf{N} = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\Delta\int_T G\frac{\partial \Psi}{\partial x'}dx'dy'dz' + \frac{\partial}{\partial y}\Delta\int_T G\frac{\partial \Psi}{\partial y'}dx'dy'dz'\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\Delta\int_T G\frac{\partial \Psi}{\partial z'}dx'dx'dz'\right\} = -2\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) = -2\Delta\Psi = 0.\ ^{12})$$

Aus (21), (25) und (27) folgt mithin $\Delta\mathsf{M} = 0$, demnach, wie behauptet,

$$\Delta\Theta = 0. \tag{28}$$

Es mögen jetzt $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$ die durch die Gleichungen (8), (8′), (8″) erklärten Funktionen bezeichnen. Aus (8) und (9) ergibt sich zunächst

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \Theta. \tag{29}$$

Da anderseits aus (8), (28) und (29) die Gleichung (6) folgt, so sind u, v, w die Lösungen des Problems.

---

[11]) Sei T_1 irgendein von geschlossenen, analytischen und regulären Flächen begrenztes Gebiet im Innern von T, das den Punkt (x,y,z) enthält. Durch teilweise Integration findet man

$$\frac{1}{2\pi}\int_T G(x,y,z;x',y',z')\frac{\partial \Psi}{\partial x'}dx'dy'dz' = \frac{1}{2\pi}\int_{T_1} G(x,y,z;x',y',z')\frac{\partial \Psi}{\partial x'}dx'dy'dz'$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{T-T_1}\frac{\partial}{\partial x'}G(x,y,z;x',y',z')\,\Psi(x',y',z')\,dx'dy'dz'$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{S_1} G(x,y,z;\sigma_1)\,\Psi(\sigma_1)\cos(n_1,x)\,d\sigma_1,$$

unter (n_1) die Innennormale im Punkte σ_1 auf S_1, unter $d\sigma_1$ das Flächenelement in σ_1 verstanden. Die in der Formel (25) angedeuteten Differentiationen können durch Differentiation unter dem Integralzeichen in den drei Integralausdrücken rechts ausgeführt werden.

[12]) Bei der Ausführung der vorgeschriebenen Differentiationen sind die Formel (26) und die hierzu analogen Formeln zu beachten.

Es ist jetzt leicht zu sehen, daß die zu (20) gehörige homogene Integralgleichung keine Lösung, außer der trivialen Lösung $\Theta \equiv 0$, hat. Andernfalls hätte das erste Randwertproblem der Elastizitätstheorie bei verschwindenden Randwerten Lösungen, die in T nicht identisch gleich Null sein würden, was nicht angeht.

Leipzig, 24. Juli 1923.

(Eingegangen am 24. Juli 1923.)

Entwicklungen willkürlicher Funktionen nach funktionentheoretischen Methoden.

Von

Harald Geppert in Breslau.

§ 1.

Einleitung.

Cauchy hat in seinen ersten „Exercices des Mathématiques“[1]) die von ihm geschaffene Residuenrechnung zu einer Höhe geführt, von der aus sich bequem eine Menge analytischer und physikalischer Probleme erfolgreich bearbeiten läßt. Die *analytischen* Fragen, die sich speziell an Entwicklungen willkürlicher Funktionen vermittels meromorpher anschließen, sind hauptsächlich schon in den Exercices gelöst; allerdings sind die hier gegebenen Beweise für unsern heutigen Standpunkt nicht als befriedigend anzusehen und haben daher mancher Vervollkommnung bedurft, wie sie etwa E. Freund[2]) nach einer von Kneser herrührenden Methode vorgenommen hat. Auf *physikalische* Aufgaben wendet hingegen Cauchy seinen Residuenkalkül erstmalig in dem „Mémoire sur l'application du calcul des résidus à la solution des problèmes de physique mathématique“ (Paris 1827) an; letztere Arbeit ist leider ziemlich unbeachtet geblieben[3]) was sich wohl aus der etwas gedrängten Darstellung und ihren lückenhaften Beweisen erklärt. Trotzdem ist sie sehr inhaltsreich und verallgemeinerungsfähig, ja, beantwortet Fragen, die erst viel später durch die Entwicklung der Theorie der Integralgleichungen Interesse gewonnen haben. Dem Studium jener Abhandlung ist die vorliegende Arbeit entwachsen; sie stellt sich als Ziel, die von Cauchy größtenteils nur in speziellen Fällen angegebenen und nur formalistisch abgeleiteten Funktionsentwicklungen

[1]) Paris 1826/7, vgl. auch Œuvres II, 6, 7.

[2]) E. Freund, Entwicklungen willkürlicher Funktionen vermittelst meromorpher. Dissertation, Breslau 1909.

[3]) Sie ist auch in den gesammelten Werken bisher nicht veröffentlicht.

auf eine gemeinsame Grundlage zurückzuführen und sie mit den Hilfsmitteln der modernen Funktionentheorie zu beweisen, d. h. ihre Konvergenz und Gültigkeit aufzuzeigen.

Wir legen als Ausgangspunkt zugrunde eine lineare homogene Differentialgleichung in den Variablen x, t mit konstanten Koeffizienten, für die gewisse Rand- und Anfangsbedingungen vorgeschrieben sind. Nachdem es gelungen ist, eine die Randbedingungen erfüllende Lösung derselben zu finden, greifen wir, um damit auch die Anfangsbedingungen befriedigen zu können, zu einer neuen allgemeinen Entwicklung, die — im Gegensatz etwa zur biorthogonalen — aus der vorgelegten Differentialgleichung ohne Vermittlung der adjungierten sofort abgelesen werden kann. Es zeigt sich nun, daß die erhaltene Entwicklung einen hohen Grad von Allgemeinheit in sich birgt, ähnlich wie die seinerzeit von Birkhoff bewiesene biorthogonale Entwicklung[4]), und interessante Ausblicke auf neue Probleme gestattet. Das erhaltene Resultat umfaßt im besonderen auch die Funktionsentwicklungen, wie sie bei Schwingungen von Stäben, Lamellen, Platten usw., sowie Wärmeleitungsproblemen auftreten, wobei die Konvergenzfrage durch unsere Theorie bereits erledigt ist.

§ 2.

Einige Entwicklungsformeln.

Wir verstehen im folgenden unter $r = r' + ir''$ eine komplexe Variable, die alle Werte der r-Ebene annehmen kann, und deren Realteil r', deren Imaginärteil ir'' ist. Ferner sei x eine reelle, innerhalb des Intervalls $x_0 \dots x_1$ liegende Veränderliche, $f(x)$ eine, in diesem Bereich des Argumentes endliche Funktion, die, abgesehen von endlich vielen Sprüngen stetig, d. h. nach der Terminologie von Kneser[5]) „stückweise stetig" ist, und eine integrierbare, beschränkte Ableitung besitzt. In diesen Bezeichnungen leiten wir zunächst einige Sätze aus der Theorie der Funktionsentwicklungen ab, die wir des weiteren benötigen werden, und die, obwohl teilweise bekannt, doch bislang eines übersichtlichen Beweises und einer Zusammenstellung entbehren.

Satz 1. *Es ist für* $x_0 < x < x_1$:

$$\lim_{r=-\infty} r\int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu = -f(x-0); \quad \lim_{r'=+\infty} r\int_{x}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu = +f(x+0).$$

[4]) G. D. Birkhoff, American M. S. Transactions **9** (1908), S. 219, 273; Rendiconti di Palermo **36** (1913), S. 115; vgl. auch die Dissertation des Verfassers, Breslau 1923.

[5]) Vgl. A. Kneser, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen. Braunschweig 1922, S. 7.

Beweis: Mittels partieller Integration findet sich, wenn an den Stellen x_ν Sprünge der Funktion $f(x)$ liegen:

$$(1)\quad r\int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu = f(x_0)\,e^{r(x-x_0)} + \sum_{\nu}^{x_\nu<x} f(x_\nu)\,e^{r(x_\nu-x_0)}\Big|_{x_\nu-0}^{x_\nu+0} - f(x-0) + \int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f'(\mu)\,d\mu.$$

Gemäß der Voraussetzung, daß $f'(x)$ für $x_0 < x < x_1$ beschränkt sei, liegt nun $f'(\mu)$ unterhalb einer endlichen Schranke g. Wir wenden daher auf (1) den ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung an, und erhalten, wenn $\bar{g}_1$ einen Mittelwert der Größe $f'(\mu)$ für den Bereich $\mu = x_0 \ldots x$ bedeutet, der nach Voraussetzung endlich ausfallen muß:

$$(2)\quad \lim_{r'=-\infty} r\int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu = f(x_0)\lim_{r'=-\infty} e^{r(x-x_0)} - \sum_{\nu}^{x_\nu<x} f(x_\nu)\Big|_{x_\nu-0}^{x_\nu-0}\lim_{r'=-\infty} e^{r(x_\nu-x_0)} - f(x-0) + \bar{g}_1 \lim_{r'=-\infty}\frac{1}{r}\{e^{r(x-x_0)}-1\} = -f(x-0).$$

Ebenso ist:

$$(3)\quad r\int_{x}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu = f(x-0) + \sum_{\nu}^{x_\nu>x} f(x_\nu)\Big|_{x_\nu-0}^{x_\nu+0} e^{r(x_\nu-x_1)} - f(x_1)\,e^{-r(x_1-x)} + \int_{x}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f'(\mu)\,d\mu.$$

Unter den gleichen Voraussetzungen wie oben erhalten wir also, wenn wiederum $\bar{g}_2$ einen Mittelwert von $f'(\mu)$ für das Gebiet $\mu = x \ldots x_1$ bezeichnet, und der erste Mittelwertsatz herangezogen wird:

$$(4)\quad \lim_{r'=+\infty} r\int_{x}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu = f(x+0) - \sum_{\nu}^{x_\nu>x} f(x_\nu)\Big|_{x_\nu-0}^{x_\nu+0}\lim_{r'=+\infty} e^{-r(x_1-x_\nu)} - f(x_1)\lim_{r'=+\infty} e^{-r(x_1-x)} + \bar{g}_2 \lim_{r'=+\infty}\frac{1}{r}\{1-e^{r(x-x_1)}\} = f(x+0).$$

Ist speziell $f(x)$ an der Stelle x stetig, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\lim_{r'=-\infty} r\int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu = -f(x), \qquad \lim_{r'=+\infty} r\int_{x}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu = +f(x).$$

Da x eine reelle Variable ist, erhellt aus dem Gang des Beweises, daß r'', d. h. der Imaginärteil unserer komplexen Veränderlichen r, der Größe und dem Vorzeichen nach beliebig angenommen werden kann.

Wir definieren nun eine Folge von Kreisen K_σ ($\sigma = 1, 2, 3, \ldots$) in der r-Ebene um deren Nullpunkt, mit diskret ins Unendliche wachsenden Radien, die wir so wählen, daß die Kreise K_σ von gewissen durch das

Problem vorgeschriebenen „Sicherheitskreisen", deren Radien stets unterhalb einer endlichen Grenze gelegen sind, einen positiven Minimalabstand haben, also diese weder berühren noch schneiden.

Weiterhin mögen $\chi(r)$ und $\mathfrak{F}(r)$ zwei analytische Funktionen von r darstellen, von der Art, daß ihr Verhältnis $\frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}$ nur diskrete Pole, d. h. außerwesentliche Singularitäten hat. Schließen wir diese durch Sicherheitskreise von beliebig kleinem, jedoch fest gewähltem Radius aus, so soll genanntes Verhältnis außerhalb dieser Kreise in der ganzen r-Ebene beschränkt sein, und die Sicherheitskreise sollen sich auch im Unendlichen in der Weise in endlichem Abstand folgen, daß es stets möglich ist, zwischen ihnen die Konturen K_σ durchzulegen. Es gilt dann der:

Satz 2. *Das Verhältnis der analytischen Funktionen $\chi(r)$ und $\mathfrak{F}(r)$ sei so beschaffen, daß folgende Voraussetzungen erfüllt sind*

a) *es ist*: $\lim\limits_{r'=-\infty} \frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)} = c_1$; $\quad \lim\limits_{r'=+\infty} \frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)} = c_2$, *wobei c_1, c_2 Konstanten bedeuten, und r'' bei den Grenzübergängen $r' \to \pm\infty$ beliebig gewählt werden darf*;

b) *es ist bei beliebig gehaltenem r''*:

$$\lim_{r'=\pm\infty} r\frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}\int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu = 0; \quad \lim_{r'=-\infty} r\frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}\int_{x}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu = 0.$$

Dann besteht die Gleichung:

$$\lim_{\sigma=\infty} \oint_{K_\sigma} \frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}\int_{x_0}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu\, dr = \pi i f(x)(c_2 - c_1).$$

Beweis: Wir zerlegen:

$$\oint_{K_\sigma} \frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}\int_{x_0}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu\, dr = \oint_{K_\sigma} \frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}\int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu\, dr$$
$$+ \oint_{K_\sigma} \frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}\int_{x}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu\, dr.$$

Die Integration soll sich über den Kreis K_σ erstrecken, also setzen wir:

$$r = R e^{i\varphi}; \qquad dr = r\, i\, d\varphi$$

und erhalten:

$$\oint_{K_\sigma} \frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}\int_{x_0}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu\, dr = i\int_0^{2\pi} r\frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}\int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu\, d\varphi$$
$$+ i\int_0^{2\pi} r\frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}\int_{x}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu\, d\varphi.$$

Nunmehr teilen wir unser Integrationsgebiet durch die beiden zur r''-Achse parallelen Geraden $r' = \pm p$ in drei Streifen, die wir der Reihe nach, von links nach rechts, mit I, II, III bezeichnen. Gemäß der Voraussetzung a) gilt zunächst die daselbst formulierte Konvergenz unabhängig davon, wie r in die Unendlichkeit strebt, wenn nur r' gegen $-\infty$ bzw. ∞ rückt. Dann dürfen bei hinreichend großer Wahl von p in den Gebieten I und III keine Pole der Funktion $\frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}$ mehr liegen, denn es müssen bei genügend großem p die Werte von $\frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}$ in I die Darstellung zulassen: $c_1 - \varepsilon$, wo ε durch hinreichend große Wahl von p beliebig klein gemacht werden kann; dies wäre unmöglich, wenn $\frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}$ in I Pole hätte. Im Gebiete I ist ferner $r' \leqq -p$, wir können also, wenn p passend groß gewählt wird, unter Anwendung des Satzes 1 und der Voraussetzung a) des zu beweisenden Satzes schreiben:

$$r\frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}\int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu = -c_1 f(x) + \varepsilon_p, \quad \text{wobei:} \quad \lim_{p=\infty} \varepsilon_p = 0$$

ist. Ferner ist nach den Bedingungen b) des Satzes im Bereiche I:

$$r\frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}\int_{x}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu = \varepsilon'_p \quad \text{und} \quad \lim_{p=\infty} \varepsilon'_p = 0.$$

Analog ist im Gebiete III für $r' \geqq p$ und hinreichend großes p:

$$r\frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}\int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu = \varepsilon'_p, \qquad r\frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}\int_{x}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu = -c_2 f(x) + \bar{\varepsilon}_p,$$

$$\lim_{p=\infty} \bar{\varepsilon}'_p = \lim_{p=\infty} \bar{\varepsilon}_p = 0.$$

Schließlich gehen wir an die Betrachtung des Gebietes II. Es hat daselbst $\frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}$, wie oben vorausgesetzt, nur außerwesentliche Singularitäten von der Art, daß, wenn wir diese durch Sicherheitskreise von beliebig kleinem Radius ausschließen, in der übrigbleibenden Fläche $\frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}$ beschränkt ist. Da sich ferner die Sicherheitskreise nirgends häufen dürfen — die Singularitäten sollen ja nur außerwesentlich sein —, ist es bei passend kleiner Wahl ihres Radius stets möglich, um den Nullpunkt O eine Folge von Kreisen K_n mit den Radien ϱ_n zu schlagen, die von den Sicherheitskreisen einen positiven Minimalabstand haben. Es ist schließlich, wenn wir eine analoge Zerlegung wie in Gleichung (1) vornehmen:

$$\left| r\int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu \right| = e^{r\,x-x_0} f(x_0) + \sum_{\nu}^{x_\nu<x} f(x_\nu)\, e^{r\,(x_\nu-x_0)} \Big|_{x_\nu-0}^{x_\nu+0} - f(x) + \frac{\bar g_1}{r}\left\{e^{r\,x-x_0}\right.$$

$$\leqq \left| f(x_0)\, e^{p\,(x-x_0)} \right| + \left| f(x) \right| + \left| \sum_{\nu}^{x_\nu<x} \left\{ f(x_\nu+0) - f(x_\nu-0) \right\} e^{p\,(x_\nu-x_0)} \right| + \left| \frac{\bar g_1}{r}\left\{ e^{p\,(x-x_0)} \right.\right.$$

und solange p endlich ist, folgt also, daß in II auch $r\int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu < M$ ist, worin M eine endliche positive Konstante bedeutet. Ebenso finden wir, daß in II: $r\int_{x}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu < M_1$ ist, wo M_1 eine zu M analoge Größe ist.

Wir machen nun die Abschätzung auf der großen Kreiskontur K_ϱ in der bekannten Weise, daß wir vom Nullpunkt aus nach den Durchstoßpunkten der Geraden $r' = \pm p$ mit den Kreisen K_ϱ die Strahlen ziehen. Diese schließen dann bei festgehaltenem p für hinreichend großes ϱ_ν mit der imaginären Achse je den Winkel ε ein, wo ε durch genügend große Wahl von ϱ_ν beliebig klein gemacht werden kann. Dann gibt das zur Diskussion stehende, über K_ϱ zu erstreckende Integral in I den Wert:

$$i\int_{\frac{1}{2}\pi+\varepsilon}^{\frac{3}{2}\pi-\varepsilon} \left\{ -c_1 f(x) + \varepsilon_p + \varepsilon_p' \right\} d\varphi = i\,(\pi - 2\varepsilon)\left\{ -c_1 f(x) + \eta_p + \eta_p' \right\}.$$

Hier sind nach Anwendung des ersten Mittelwertsatzes η_p, η_p' Mittelwerte von ε_p, ε_p' im Integrationsgebiet, also solche Größen, für die ebenso wie für ε_p, ε_p' gilt: $\lim_{p=\infty} \eta_p = \lim_{p=\infty} \eta_p' = 0$. Desgleichen wird das Integral in III:

$$i\int_{\frac{1}{2}\pi+\varepsilon}^{\frac{1}{2}\pi-\varepsilon} \left\{ c_2 f(x) + \bar\varepsilon_p + \bar\varepsilon_p' \right\} d\varphi = i\,(\pi - 2\varepsilon)\left\{ c_2 f(x) + \bar\eta_p + \bar\eta_p' \right\};$$

auch hier sind $\bar\eta_p$, $\bar\eta_p'$ durch Anwendung des ersten Mittelwertsatzes entstanden und erfüllen die Relationen: $\lim_{p=\infty} \bar\eta_p = \lim_{p=\infty} \bar\eta_p' = 0$. Schließlich ist der auf II entfallende Integralteil kleiner als $4\,\varepsilon\,M$.

Wir lassen jetzt bei festgehaltenem, wenn auch beliebig groß angenommenem p die Radien ϱ_ν ins Unendliche wachsen, so daß die Größe ε unendlich klein wird, und erhalten so als Wert des Integrals in I: $i\pi\left\{ -c_1 f(x) + \eta_p + \eta_p' \right\}$; in III: $i\pi\left\{ c_2 f(x) + \bar\eta_p + \bar\eta_p' \right\}$. In II wird der Integralwert, der eine Funktion von ϱ_ν und p darstellt — wir wollen sie vorübergehend mit $\Psi(\varrho_\nu, p)$ bezeichnen —, für alle endlichen p beim Grenzübergang $\varrho_\nu \to \infty$ gleich Null, d. h. es ist: $\lim_{\varrho_\nu=\infty} \Psi(\varrho_\nu, p) = 0$. Nachdem dieser Grenzübergang vollzogen ist, dürfen wir p beliebig groß werden lassen, so daß η_p, η_p', $\bar\eta_p$, $\bar\eta_p'$ verschwindend klein werden und es gilt dann

auch die Beziehung: $\lim_{p=x} \lim_{\varrho_n = x} \Psi(\varrho_n, p) = 0$, wobei aber ganz wesentlich auf die Reihenfolge der angedeuteten Grenzübergänge zu achten ist. Wir finden somit schließlich als den gesuchten Wert des Konturintegrals:

$$(5) \qquad \lim_{n=x} \oint_{K_n} \frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} e^{r(x-u)} f(u)\, du\, dr = \pi i f(x)(c_2 - c_1), \qquad \text{q. e. d.}$$

Für den Fall, daß die Stelle x eine Unstetigkeitsstelle der Funktion $f(x)$ ist, lautet die Gleichung:

$$(5\,\text{a}) \qquad \lim_{n=x} \oint_{K_n} \frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} e^{r(x-u)} f(u)\, du\, dr = \pi i \{c_2 f(x-0) - c_1 f(x-0)\}.$$

Diese Ableitung bleibt im großen und ganzen gültig im Falle, daß $\frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}$ Pole hat, die auf bestimmten, von O ausgehenden Strahlen liegen oder asymptotisch in Streifen zu liegen kommen, die in endlicher Breite parallel zu diesen Strahlen laufend sie umgeben. Es kommen dann die Pole teilweise auch in die Gebiete I und III zu liegen. Wir schließen sie durch Sicherheitskreise aus, dann bleibe $\frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}$ außerhalb derselben dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Grenze. Betrachten wir etwa einen solchen Strahl ξ, der in das Gebiet I laufe, und sei η sein Durchstoßpunkt mit dem Kreise K_n; dann ist in η und Umgebung $\frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}$ beschränkt, und es läßt sich, da außerhalb des den Strahl ξ in endlicher Breite umschließenden Parallelstreifens die Bedingungen a) und b) des Satzes erfüllt sein sollen, ein endlicher Bereich δ auf K_n um η abgrenzen, in dem jene Bedingungen a) und b) nicht erfüllt sind. Bleiben aber in δ die von diesen Voraussetzungen betroffenen Größen beschränkt, so treten, da δ vom Nullpunkt aus unter dem mit hinreichend großem ϱ_n beliebig kleinen Winkel δ' erscheint, zu dem obigen Integral nur Glieder der Form $C \cdot \delta'$ hinzu, wo C eine unterhalb einer endlichen Schranke liegende Funktion von r ist, also Glieder, die mit wachsendem ϱ_n beliebig klein werden, mithin in der Grenze für $\varrho_n \to \infty$ verschwinden. Es gilt demnach unser Satz auch für diesen Fall.

Ist in Satz 2 speziell $c_2 - c_1 = 1$, was durch Beifügung eines konstanten Faktors an $\chi(r)$ unter Umständen erreicht werden kann, so wird:

$$(6) \qquad \lim_{n=x} \oint_{K_n} \frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} e^{r(x-u)} f(u)\, du = 2\pi i f(x)$$

$$(6\,\text{a}) \qquad \text{bzw.} = 2\pi i \frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}.$$

ist aber $c_1 = c_2 = 0$, so erhalten wir:

$$\lim_{\sigma=\infty} \oint_{K_\sigma} \frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu\, dr = 0.$$

Als eine Erweiterung des vorangehenden Satzes gilt der folgende

Satz 3. *Lassen sich bei gegebenem $\mathfrak{F}(r)$ zwei analytische Funktionen $\chi(r)$ und $\psi(r)$ angeben, die in der Beziehung: $\psi(r) = \chi(r) + \overline{\omega}(r)\mathfrak{F}(r)$ zueinander stehen $\overline{\omega}(r)$ bedeute eine ganze holomorphe Funktion von r —, und die die folgenden Bedingungen erfüllen:*

a) $\frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}$ *soll nur außerwesentliche Singularitäten haben und außerhalb der diese umschließenden Sicherheitskreise in der ganzen r-Ebene beschränkt sein;*

b) *es ist:* $\lim_{r'=-\infty} \frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)} = c_1$; $\lim_{r'=+\infty} \frac{\psi(r)}{\mathfrak{F}(r)} = c_2$, *wo c_1, c_2 endliche Konstanten bedeuten und während der Grenzübergänge $r' \to \pm\infty$ der imaginäre Variablenteil r'' beliebig gewählt werden kann;*

c) *es ist bei willkürlich gehaltenem r'':* $\lim_{r'=-\infty} r \frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu = 0$

und $\lim_{r'=-\infty} r \frac{\psi(r)}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu = 0$; *so gilt:*

$$\lim_{\sigma=\infty} \oint_{K_\sigma} \frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu\, dr = \pi i f(x)\,(c_2 - c_1).$$

Beweis. Es ist nämlich wiederum in der Grenze für $\sigma = \infty$:

$$\oint_{K_\sigma} \frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu\, dr = -\pi i c_1 f(x),$$

$$\oint_{K_\sigma} \frac{\psi(r)}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu\, dr$$

$$= \oint_{K_\sigma} \frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu\, dr + \oint_{K_\sigma} \omega(r) \int_{x}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu\, dr = \pi i c_2 f(x).$$

Nun verschwindet aber das letzte, $\omega(r)$ enthaltende Konturintegral, da der Integrand keine Pole bezüglich der Variablen r aufweist. Wir erhalten also:

$$\oint_{K_\infty} \frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu\, dr = \pi i c_2 f(x),$$

woraus dann die Behauptung folgt. Auch bei diesem Satze gelten entsprechende Erweiterungen und Korollare wie beim vorigen.

§ 3.

Anwendungen.

Wir wollen hier kurz zwei Beispiele für die Anwendbarkeit der im vorhergehenden entwickelten Sätze anführen und zeigen, daß sich speziell die in der Freundschen Dissertation abgeleiteten Entwicklungen als Konsequenzen des Satzes 3 ableiten lassen [6]).

1. Beispiel. Wir setzen: $\chi(r) = 1$, $\bar{\omega}(r) = 1$, $\mathfrak{F}(r) = e^{ar} - 1$, $\psi(r) = e^{ar}$, unter der Annahme, daß a eine positive Konstante bedeutet und $a \geqq x_1 - x_0$ ist. Dann ist:

$$\lim_{r=-\infty} \frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)} = \lim_{r=-\infty} \frac{1}{e^{ar}-1} = -1, \qquad \lim_{r=+\infty} \frac{\psi(r)}{\mathfrak{F}(r)} = \lim_{r=+\infty} \frac{1}{1-e^{-ar}} = 1,$$

ferner unter Anwendung der Zerlegungen (1) bzw. (3), wenn $\bar{g}_1$ bzw. g_2 Mittelwerte der beschränkten Größe $f'(\mu)$ für die Intervalle $x_0 \ldots x$ bzw. $x \ldots x_1$ repräsentieren:

$$\lim_{r=+\infty} r \frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu$$

$$= \lim_{r=+\infty} \frac{1}{e^{ar}-1} \left\{ f(x_0)\, e^{r(x-x_0)} - f(x) + \frac{\bar{g}_1}{r} \left(e^{r(x-x_0)} - 1 \right) \right\} = 0,$$

$$\lim_{r=-\infty} r \frac{\psi(r)}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu$$

$$= \lim_{r=-\infty} \frac{e^{ar}}{e^{ar}-1} \left\{ f(x) - f(x_1)\, e^{r(x-x_1)} + \frac{1}{r} \bar{g}_2 \left(1 - e^{r(x-x_1)} \right) \right\} = 0.$$

Somit sind alle Bedingungen des Satzes 3 befriedigt und es gibt seine Anwendung die Formel:

$$2\pi i f(x) = \oint_{K_x} \frac{\int_{x_0}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{e^{ar}-1}\, dr.$$ [7])

2. Beispiel. Wir nehmen:

$$\mathfrak{F}(r) = e^{ar}\varphi(r) - e^{-ar}\bar{\psi}(r), \quad \chi(r) = e^{-ar}\bar{\psi}(r), \quad \bar{\omega}(r) = 1, \quad \psi(r) = e^{ar}\varphi(r),$$

worin $\varphi(r)$, $\bar{\psi}(r)$ ganze rationale Funktionen gleichen Grades von r und a

[6]) Überhaupt sind unsere beiden Sätze als Verallgemeinerung der Freundschen Resultate aufzufassen.

[7]) Siehe Freund, a. a. O. S. 30—36.

eine positive Konstante bedeuten. Ist dann $2a \geqq x_1 - x_0$, so gilt, ebenso wie oben:

$$\lim_{r=-\infty} \frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)} = -1, \qquad \lim_{r=-\infty} \frac{\psi(r)}{\mathfrak{F}(r)} = +1,$$

$$\lim_{r=+\infty} r \frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu = \lim_{r=-\infty} r \frac{\psi(r)}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu = 0,$$

und es gibt daher der Satz 3:

$$2\pi i f(x) = \oint_{K_x} \frac{e^{ar}\varphi(r) \int_{x_0}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{e^{ar} q(r) - e^{-ar} \bar{q}(r)} \, dr.$$

In gleicher Weise lassen sich viele Entwicklungen leicht beweisen, und zwar viel schneller als auf dem etwa von Freund eingeschlagenen Wege.

§ 4.

Das Randwertproblem.

Wir betrachten nun eine homogene lineare partielle Differentialgleichung für die unbekannte Funktion z in den Variablen x und t,*) die konstante Koeffizienten hat, und in der die Ableitungen nach x und t separiert sind. Diese schreiben wir in der üblichen Symbolik:

$$(1) \qquad F(D_x, D_t) z = \sum_{i=0}^{n} A_i \frac{\partial^i z}{\partial x^i} + \sum_{k=0}^{m} B_k \frac{\partial^k z}{\partial t^k} = 0,$$

so daß ihre Ordnung bezüglich x gleich n und bezüglich t gleich m ist: die A_i, B_k sind konstante Koeffizienten. Für das Integral von (1) setzen wir als Randbedingungen fest, daß:

$$(2) \quad \text{für } x = x_0\text{: } f_0(D_x) z = 0; \quad \text{für } x = x_1\text{: } f_1(D_x) z = 0; \ \ldots; \quad \text{für } x = x_{n-1}\text{: } f_{n-1}(D_x) z = 0$$

sei. Hierin bedeuten die $f_i(D_x)$ lineare Differentialausdrücke, die homogen und höchstens von der Ordnung $n - 1$ sind; als räumliche Randbedingungen sollen sie von t unabhängig sein, weiterhin wollen wir fordern, daß die Koeffizienten der Ableitungen von x in $f_i(D_x)$ konstant sind.

Die zeitlichen Anfangsbedingungen nehmen wir an in der Form, daß

$$(3) \quad \text{für } t = t_0\text{: } z = \bar{f}_0(x), \ \frac{\partial z}{\partial t} = \bar{f}_1(x), \ \ldots, \ \frac{\partial^{m-1} z}{\partial t^{m-1}} = \bar{f}_{m-1}(x)$$

sei, worin $\bar{f}_i$ stückweise stetige, beschränkte Funktionen mit endlich vielen Sprüngen und beschränkter integrierbarer Ableitung bedeuten.

*) x möge, wie üblich, eine räumliche Variable, t die Zeit darstellen.

Weiterhin ist der zu (1) gehörige algebraische Ausdruck, den man erhält, wenn man dort statt der Derivierten nach x die Variable r und statt derer nach t die Veränderliche s substituiert:

$$F(r, s) = \sum_{i=0}^{n} A_i r^i + \sum_{k=0}^{m} B_k s^k;$$

sein konstantes Glied ist $A_0 + B_0$. Wir stellen damit die Gleichung auf:

$$F(r, s) = F(\varrho, s), \quad \text{oder:} \quad \sum_{i=0}^{n} A_i r^i + \sum_{i=0}^{m} B_i s^i = \sum_{i=0}^{n} A_i \varrho^i + \sum_{i=0}^{m} B_i s^i,$$

die also gleichbedeutend ist mit

$$(4) \qquad F(r, 0) = F(\varrho, 0), \quad \text{d. h.} \quad \sum_{i=0}^{n} A_i (r^i - \varrho^i) = 0.$$

Dies ist bei festgehaltenem r eine algebraische Gleichung für ϱ, ihre Wurzeln bezeichnen wir mit $r_1 = r; r_2; \ldots; r_n$. Es ist dann klar, daß die r_i algebraische Ausdrücke in der Größe r sind, also sämtlich als Funktionen von r aufgefaßt werden dürfen.

Ein partikuläres Integral von (1) setzt man, wenn p und s noch zu bestimmende Konstanten sind, zunächst an in der Form:

$$(\alpha) \qquad z = \text{const.}\, e^{px} e^{st}.$$

Dann gibt das Einsetzen in (1) für p und s die Bedingung, daß

$$(\beta) \qquad \sum_{i=0}^{n} A_i p^i + \sum_{i=0}^{m} B_i s^i = 0.$$

Ist jetzt s bei einem vorgelegten Werte von r so gewählt, daß die Gleichung erfüllt ist:

$$(\gamma) \qquad \sum_{i=0}^{n} A_i r^i + \sum_{i=0}^{m} B_i s^i = 0,$$

so sind die n möglichen Werte p die Wurzeln der Gleichung (4), d. h. die Größen $r_1 = r; r_2; \ldots; r_n$. Ein umfassenderes Integral von (1) können wir also zusammenstellen in der Form:

$$(\alpha') \qquad z = e^{st} \sum_{i=0}^{n} R_i e^{r_i x},$$

worin die R_i von x und t unabhängig sind. Mit dieser Lösung sind zunächst die n Randbedingungen zu erfüllen, wodurch wir für die R_i die folgenden n homogenen linearen Gleichungen erhalten:

$$(5) \quad e^{-st} f_\lambda(D_x) z = R_1 e^{r_1 x_\lambda} f_\lambda(r_1) + R_2 e^{r_2 x_\lambda} f_\lambda(r_2) + \ldots + R_n e^{r_n x_\lambda} f_\lambda(r_n) = 0$$
$$(\lambda = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Da die R_i als nicht sämtlich verschwindend vorausgesetzt werden dürfen, so muß die Determinante

$$(6)\qquad \mathfrak{F}(r)=\begin{vmatrix} e^{r_1x_0}f_0(r_1) & e^{r_2x_0}f_0(r_2) & \dots & e^{r_nx_0}f_0(r_n)\\ e^{r_1x_1}f_1(r_1) & e^{r_2x_1}f_1(r_2) & \dots & e^{r_nx_1}f_1(r_n)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ e^{r_1x_{n-1}}f_{n-1}(r_1) & e^{r_2x_{n-1}}f_{n-1}(r_2) & \dots & e^{r_nx_{n-1}}f_{n-1}(r_n)\end{vmatrix}$$

dieses Gleichungssystems verschwinden. Diese enthält nur von r abhängige Größen, es muß also die bis jetzt noch freistehende Zahl r so bestimmt werden, daß sie eine Wurzel der Gleichung $\mathfrak{F}(r)=0$ ist. Die Werte von R_i, die sich dann aus den obigen Gleichungen (5) ergeben, sind proportional den Unterdeterminanten einer Zeile in $\mathfrak{F}(r)$, von denen wir fortan die Voraussetzung treffen, daß sie nicht sämtlich gleichzeitig Null werden.

Der Mangel des Ansatzes (5) ist der, daß, wenn r keine Wurzel der Gleichung $\mathfrak{F}(r)=0$ ist, die R_i sämtlich verschwinden und erst dann nichtverschwindende Werte annehmen können, wenn r, als komplexe Variable aufgefaßt, in eine Nullstelle von $\mathfrak{F}(r)$ rückt; es wären somit die R_i unstetige, zum mindesten recht unhandliche Funktionen von r. Wir vermeiden diese Schwierigkeit, wenn wir die R_i als Funktionen von r durch das folgende Gleichungssystem definieren:

$$(7)\qquad R_1e^{r_1x_\lambda}f_\lambda(r_1)+R_2e^{r_2x_\lambda}f_\lambda(r_2)+\dots+R_ne^{r_nx_\lambda}f_\lambda(r_n)=\mathfrak{R}_\lambda\mathfrak{F}(r)$$
$$(\lambda=0,1,\dots,n-1);$$

in ihm bedeuten die $\mathfrak{R}_i$ holomorphe, stetige Funktionen der Variablen r, die wir im übrigen beliebig annehmen können, z. B. dürfen wir alle bis auf eine gleich Null setzen. Die Lösungen von (7) sind, solange $\mathfrak{F}(r)\neq 0$ ist, die folgenden Determinanten:

$$(8)\qquad R_1=\begin{vmatrix} \mathfrak{R}_0 & e^{r_2x_0}f_0(r_2) & \dots & e^{r_nx_0}f_0(r_n)\\ \mathfrak{R}_1 & e^{r_2x_1}f_1(r_2) & \dots & e^{r_nx_1}f_1(r_n)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathfrak{R}_{n-1} & e^{r_2x_{n-1}}f_{n-1}(r_2) & \dots & e^{r_nx_{n-1}}f_{n-1}(r_n)\end{vmatrix};$$

$$R_2=\begin{vmatrix} e^{r_1x_0}f_0(r_1) & \mathfrak{R}_0 & e^{r_3x_0}f_0(r_3) & \dots & e^{r_nx_0}f_0(r_n)\\ e^{r_1x_1}f_1(r_1) & \mathfrak{R}_1 & e^{r_3x_1}f_1(r_3) & \dots & e^{r_nx_1}f_1(r_n)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ e^{r_1x_{n-1}}f_{n-1}(r_1) & \mathfrak{R}_{n-1} & e^{r_3x_{n-1}}f_{n-1}(r_3) & \dots & e^{r_nx_{n-1}}f_{n-1}(r_n)\end{vmatrix},\ \text{usw.}$$

Wir behaupten aber, daß diese Werte auch dann noch die Lösungen von (7) darstellen, wenn $\mathfrak{F}(r) = 0$ ist. Es geht in diesem Falle das letzte Gleichungssystem über in das homogene lineare System (5), und unsere Behauptung ist erwiesen, wenn wir zeigen, daß die Lösungen (8) im Falle, daß $\mathfrak{F}(r)$ verschwindet, proportional den Unterdeterminanten von $\mathfrak{F}(r)$ sind. Dieser Beweis ist leicht zu führen.

Schreiben wir die Gleichungen (7) und (6) in leicht verständlicher abgekürzter Schreibweise:

$$R_1 a_{\lambda 1} + R_2 a_{\lambda 2} + \ldots + R_n a_{\lambda n} = \mathfrak{R}_\lambda \mathfrak{F}(r) \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, n-1),$$
$$\mathfrak{F}(r) = |a_{ik}| \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1;\ k = 1, 2, \ldots, n),$$

so ist

$$R_1 = \begin{vmatrix} \mathfrak{R}_0 & a_{02} & \ldots & a_{0n} \\ \mathfrak{R}_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{R}_{n-1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}; \quad R_2 = \begin{vmatrix} a_{01} & \mathfrak{R}_0 & a_{03} & \ldots & a_{0n} \\ a_{11} & \mathfrak{R}_1 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & \mathfrak{R}_{n-1} & a_{n-1,3} & \ldots & a_{n-1,n} \end{vmatrix};$$

$$\ldots; \quad R_n = \begin{vmatrix} a_{01} & a_{02} & \ldots & a_{0,n-1} & \mathfrak{R}_0 \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} & \mathfrak{R}_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n-1} & \mathfrak{R}_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Nun seien die A_{ik} die Unterdeterminanten der a_{ik} bezüglich $\mathfrak{F}(r)$, gleich versehen mit dem Vorzeichen, das ihnen bei der Entwicklung von $\mathfrak{F}(r)$ nach den a_{ik} zukommt. Dann können wir die R_i explizit darstellen in der Form

$$R_\lambda = \mathfrak{R}_0 A_{0\lambda} + \mathfrak{R}_1 A_{1\lambda} + \ldots + \mathfrak{R}_{n-1} A_{n-1,\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n).$$

Ist jetzt $\mathfrak{F}(r) = 0$, so gelten zufolge bekannten Determinantensätzen folgende Relationen:

$$\mathfrak{R}_0 A_{01} + \mathfrak{R}_1 A_{11} + \ldots + \mathfrak{R}_{n-1} A_{n-1,1} = R_1,$$
$$a_{01} A_{01} + a_{11} A_{11} + \ldots + a_{n-1,1} A_{n-1,1} \equiv \mathfrak{F}(r) = 0,$$
$$a_{0j} A_{01} + a_{1j} A_{11} + \ldots + a_{n-1,j} A_{n-1,1} = 0 \qquad (j = 3, 4, \ldots, n).$$

Fassen wir diese als ein Gleichungssystem für die A_{i1} auf und lösen es etwa nach A_{01}, so folgt, wenn Δ' die Determinante des letzten Systems bezeichnet,

$$A_{01} \Delta' = R_1 A_{02},$$

wobei

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \mathfrak{R}_0 & \mathfrak{R}_1 & \ldots & \mathfrak{R}_{n-1} \\ a_{01} & a_{11} & \ldots & a_{n-1,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{0n} & a_{1n} & \ldots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \equiv R_2.$$

Mithin erhalten wir die Beziehung $R_1 : R_2 = A_{01} : A_{02}$, die zu beweisen war. Die entsprechenden Proportionen für die anderen R_i ergeben sich auf ganz analoge Weise.

Damit ist also nachgewiesen, daß für $\mathfrak{F}(r) = 0$ die durch (8) definierten R_i als Lösungen von (5) angesehen werden können. Durch sie sind demnach auch die Randbedingungen erfüllt, und der Ansatz (α') ermöglicht, wenn r durch die Gleichung $\mathfrak{F}(r) = 0$ und s durch die Beziehung (γ), d. h. als Wurzel der Gleichung $F(r, s) = 0$ festgelegt ist. Diese Bedingungen können wir an der Lösung (α') dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir sie in Form eines doppelten Konturintegrals schreiben, dessen eines sich auf s bezieht und $F(r, s)$ im Nenner enthält, und dessen zweites, auf r bezügliche, $\mathfrak{F}(r)$ als Nenner enthält. Beachten wir, daß in (α') noch ein konstanter Faktor verfügbar bleibt, so können wir schließlich unsere Lösung (α') des Integrationsproblems in der Form schreiben:

$$(9) \qquad z = \oint_{K_x}\oint e^{s(t-t_0)}\frac{\varphi(r,s)}{F(r,s)}\,\frac{R_1 e^{r_1 x} + R_2 e^{r_2 x} + \ldots + R_n e^{r_n x}}{\mathfrak{F}(r)}\,\frac{ds}{2\pi i}\,\frac{dr}{2\pi i}.$$

Darin ist $\varphi(r, s)$ eine überall holomorphe analytische Funktion von r und s, über die wir noch geeignet verfügen können. Wir bemerken zu (9), daß darin $F(r, s)$ als Funktion von s aufzulösen ist, d. h. die Wurzeln der Gleichung $F(r, s) = 0$ in s als Funktionen von r darzustellen sind, wie durch die gegebene Ableitung bedingt wird.

Man verifiziert leicht umgekehrt, daß (9) eine Lösung von (1) ist, die die Randbedingungen erfüllt. Es gibt nämlich die Differentiation von (9):

$$\frac{\partial^i z}{\partial x^i} = \oint_{K_x}\oint e^{s(t-t_0)}\frac{\varphi(r,s)}{F(r,s)}\,\frac{R_1 r_1^i e^{r_1 x} + \ldots + R_n r_n^i e^{r_n x}}{\mathfrak{F}(r)}\,\frac{ds}{2\pi i}\,\frac{dr}{2\pi i},$$

$$\frac{\partial^k z}{\partial t^k} = \oint_{K_x}\oint s^k e^{s(t-t_0)}\frac{\varphi(r,s)}{F(r,s)}\,\frac{R_1 e^{r_1 x} + \ldots + R_n e^{r_n x}}{\mathfrak{F}(r)}\,\frac{ds}{2\pi i}\,\frac{dr}{2\pi i},$$

$$F(D_x, D_t)\,z = \sum_{i=0}^{n} A_i \frac{\partial^i z}{\partial x^i} + \sum_{k=0}^{m} B_k \frac{\partial^k z}{\partial t^k}$$

$$= \oint_{K_x}\oint e^{s(t-t_0)}\frac{\varphi(r,s)}{F(r,s)}\,\frac{R_1 e^{r_1 x}\left(\sum_{i=0}^{0,n} A_i r_1^i + \sum_{k=0}^{0,m} B_k s^k\right) + \ldots + R_n e^{r_n x}\left(\sum_{i=0}^{0,n} A_i r_n^i + \sum_{k=0}^{0,m} B_k s^k\right)}{\mathfrak{F}(r)}\,\frac{ds}{2\pi i}\,\frac{dr}{2\pi i}$$

oder, da nach (4) $\sum_{i=0}^{n} A_i r_1^i = \sum_{i=0}^{n} A_i r_2^i = \ldots = \sum_{i=0}^{n} A_i r_n^i = \sum_{i=0}^{n} A_i r^i$ ist,

$$= \oint_{K_x}\oint \frac{e^{s(t-t_0)}\varphi(r,s)}{F(r,s)}\,F(r,s)\,\frac{R_1 e^{r_1 x} + \ldots + R_n e^{r_n x}}{\mathfrak{F}(r)}\,\frac{ds}{2\pi i}\,\frac{dr}{2\pi i} = 0,$$

weil das auf s bezügliche Konturintegral, als keine Pole umschließend, verschwindet. Schließlich ist nach (9):

$$f_\lambda(D_x)z = \oint_{K_r}\oint_{K_r} \frac{e^{s(t-t_0)}\varphi(r,s)}{F(r,s)} R_1 e^{r_1 x} f_\lambda(r_1) + \ldots + R_n e^{r_n x} f_\lambda(r_n) \frac{ds}{2\pi i}\frac{dr}{2\pi i}$$

$$(\lambda = 0, 1, \ldots, n-1),$$

oder mit Beachtung der Gleichungen (7):

$$f_\lambda(D_x)z = \oint_{K_r}\oint_{K_r} \frac{e^{s(t-t_0)}\varphi(r,s)}{F(r,s)} \mathfrak{R}_\lambda \frac{ds}{2\pi i}\frac{dr}{2\pi i} = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, n-1),$$

weil das Konturintegral nach r verschwindet. Es erfüllt also in der Tat (9) die Differentialgleichung (1) und die Randbedingungen (2).

Wir spezialisieren uns nun auf den Fall, daß die Randbedingungen sich nur auf die Endpunkte x_0 und x_1 des vorgelegten Intervalls beziehen; letzteres bezeichnen wir mit $a = x_1 - x_0$. Ferner nehmen wir zunächst an, daß die Ordnung n der Differentialgleichung in x gerade sei[9]), setzen also $n = 2\mu$. Von den 2μ Randbedingungen mögen dann die ersten μ zum Punkte x_0, die letzten μ zum Punkte x_1 gehören. In (6) nehmen wir aus $\mathfrak{F}(r)$ den Faktor $e^{r_1 x_0} e^{r_2 x_0} \ldots e^{r_n x_0} = e^{x_0(r_1+r_2+\ldots+r_n)} = e^{-\frac{A_{n-1}}{A_n} x_0}$ heraus und schlagen ihn zu den $\mathfrak{R}_i$. Ersetzen wir dann in (7) die R_i durch $R_i e^{-r_i x_0}$, so lautet das neue Gleichungssystem für diese Größen:

$$\begin{aligned}
&R_1 f_0(r_1) + R_2 f_0(r_2) + \ldots + R_n f_0(r_n) = \mathfrak{R}_0 \mathfrak{F}(r)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&R_1 f_{\mu-1}(r_1) + R_2 f_{\mu-1}(r_2) + \ldots + R_n f_{\mu-1}(r_n) = \mathfrak{R}_{\mu-1}\mathfrak{F}(r)\\
&R_1 e^{a r_1} f_\mu(r_1) + R_2 e^{a r_2} f_\mu(r_2) + \ldots + R_n e^{a r_n} f_\mu(r_n) = \mathfrak{R}_\mu \mathfrak{F}(r)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&R_1 e^{a r_1} f_{n-1}(r_1) + R_2 e^{a r_2} f_{n-1}(r_2) + \ldots + R_n e^{a r_n} f_{n-1}(r_n) = \mathfrak{R}_{n-1}\mathfrak{F}(r),
\end{aligned} \tag{10}$$

wobei jetzt

$$\mathfrak{F}(r) = \begin{vmatrix}
f_0(r_1) & f_0(r_2) & \ldots & f_0(r_n)\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\
f_{\mu-1}(r_1) & f_{\mu-1}(r_2) & \ldots & f_{\mu-1}(r_n)\\
e^{a r_1} f_\mu(r_1) & e^{a r_2} f_\mu(r_2) & \ldots & e^{a r_n} f_\mu(r_n)\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\
e^{a r_1} f_{n-1}(r_1) & e^{a r_2} f_{n-1}(r_2) & \ldots & e^{a r_n} f_{n-1}(r_n)
\end{vmatrix}, \tag{11}$$

[9]) Den Fall $n = 2\mu + 1$ behandeln wir in einem späteren Paragraphen.

und infolge der veränderten Bezeichnung nimmt (9) die Form an:

$$(12) \qquad z = \oint_{K_x}\oint \frac{e^{s(t-t_0)}\varphi(r,s)}{F(r,s)} \frac{R_1 e^{r_1(x-x_0)} + \ldots + R_n e^{r_n(x-x_0)}}{\mathfrak{F}(r)} \frac{ds}{2\pi i}\frac{dr}{2\pi i}.$$

§ 5.

Die neue Entwicklung.

Wir haben in z eine die Randbedingungen erfüllende Lösung der Differentialgleichung (1) erhalten; es ist nun unsere weitere Aufgabe, hierin die noch willkürliche Funktion $\varphi(r, s)$ so zu bestimmen, daß auch den Anfangsbedingungen (3) Genüge geleistet wird. Man kann dies auf verschiedenem Wege erreichen, vor allem auf dem meistens üblichen der biorthogonalen Entwicklung[10]. Diese verwendet aber neben (1) die dazu in x adjungierte Differentialgleichung, kann also aus der vorgelegten Gleichung nicht direkt abgelesen werden. Unser Ziel ist es daher, hier eine neue Entwicklungsmethode zu geben, die diesen Übelstand vermeidet.

Zunächst setzen wir, ausgehend von (12), daselbst

$$(13) \qquad v = R_1 e^{r_1(x-x_0)} + R_2 e^{r_2(x-x_0)} + \ldots + R_n e^{r_n(x-x_0)},$$

so daß sich unsre Lösung abgekürzt schreibt:

$$(12\mathrm{a}) \qquad z = \oint_{K_\infty}\oint \frac{e^{s(t-t_0)}\varphi(r,s)}{F(r,s)} \frac{v}{\mathfrak{F}(r)} \frac{ds}{2\pi i}\frac{dr}{2\pi i} = -\sum_{r,s} Res \frac{e^{s(t-t_0)}\varphi(r,s)}{F(r,s)} \frac{v}{\mathfrak{F}(r)}.$$

Da die R_i und r_i von der willkürlichen Veränderlichen r abhängen, ist auch v als eine Funktion dieser komplexen Variablen anzusehen. Wir stellen weiterhin die Differentialgleichung für v auf. Es ist:

$$F(D_x, s)\, v = \sum_{i=0}^{n} A_i \{r_1^i R_1 e^{r_1(x-x_0)} + \ldots + r_n^i R_n e^{r_n(x-x_0)}\} + \sum_{i=0}^{m} B_i s^i v$$

$$= \sum_{i=0}^{n} A_i r^i \{R_1 e^{r_1(x-x_0)} + \ldots + R_n e^{r_n(x-x_0)}\} + \sum_{i=0}^{n} B_i s^i v,$$

letzteres mit Berücksichtigung von (4). Es folgt also:

$$F(D_x, s)\, v = \sum_{i=0}^{n} A_i r^i v + \sum_{i=0}^{m} B_i s^i v = v\, F(r, s).$$

Die gesuchte Differentialgleichung lautet mithin:

$$(14) \qquad F(D_x, s)\, v = v\, F(r, s), \quad \text{oder} \quad F(D_x, 0)\, v = v\, F(r, 0),$$

und v ist umgekehrt aus dieser Gleichung bis auf die Koeffizienten R_i

[10] Vgl. Birkhoff, a. a. O., und die Dissertation des Verfassers, S. 13–35.

bestimmt. Gemäß den Definitionsgleichungen (10) der Größen R_i erfüllt, wenn man für r eine Wurzel der Gleichung $\mathfrak{F}(r) = 0$ setzt, v noch folgende Randbedingungen:

$$(15)\quad \begin{aligned} &\text{für } x = x_0\text{: } f_0(D_x)v = 0,\ f_1(D_x)v = 0, \ldots, f_{\mu-1}(D_x)v = 0;\\ &\text{für } x = x_1\text{: } f_\mu(D_x)v = 0,\ f_{\mu+1}(D_x)v = 0, \ldots, f_{n-1}(D_x)v = 0. \end{aligned}$$

Um nun zu unsrer neuen Entwicklung zu gelangen, machen wir in (12a) den Ansatz:

$$(16)\quad \varphi(r, s) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{F(0, s) - F(0, f(\nu))}{s - \bar{f}(\nu)}\, e^{-r(\nu - x_0)}\, d\nu,$$

schreiben also die Lösung des Differentialproblems:

$$(17)\quad z = \sum_{r}\sum_{s} Res\, \frac{e^{s(t-t_0)}v}{F(r,s)\,\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} \frac{F(0, s) - F(0, \bar{f}(\nu))}{s - \bar{f}(\nu)}\, e^{-r(\nu - x_0)}\, d\nu.$$

Dabei setzen wir fest, daß in der Entwicklung des Integranden von $\varphi(r, s)$ nach Potenzen von $\bar{f}(\nu)$ die Exponenten dieser Größe durch Indizes zu ersetzen sind[11]). Dann ist:

$$\varphi(r, s) = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{0,m} B_i \frac{(s^i - \bar{f}^i)}{s - \bar{f}}\, e^{-r(\nu - x_0)}\, d\nu = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{m} B_i \sum_{\mu,\varrho} s^\mu f_\varrho\, e^{-r(\nu - x_0)}\, d\nu. \qquad (\mu + \varrho = i - 1).$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{m} B_i s^i \sum_{\varrho=0}^{i-1} \frac{\bar{f}_\varrho}{s^{\varrho+1}}\, e^{-r(\nu - x_0)}\, d\nu,$$

also vermittelt uns (12a) die Lösung:

$$(18)\quad \begin{aligned} z &= \oint_{K_\infty}\oint \frac{e^{s(t-t_0)}v}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sum_{1,m} B_i s^i \sum_{0,i-1} \frac{f_\varrho}{s^{\varrho+1}}}{\sum_{0,n} A_i r^i + \sum_{0,m} B_i s^i}\, e^{-r(\nu - x_0)}\, d\nu\, \frac{ds}{2\pi i}\frac{dr}{2\pi i}\\ \frac{\partial^k z}{\partial t^k} &= \oint_{K_\infty}\oint \frac{e^{s(t-t_0)}v}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sum_{1,m} B_i s^i \sum_{0,i-1} \frac{f_\varrho}{s^{\varrho+1}} s^k}{\sum_{0,n} A_i r^i + \sum_{0,m} B_i s^i}\, e^{-r(\nu - x_0)}\, d\nu\, \frac{ds}{2\pi i}\frac{dr}{2\pi i}. \end{aligned}$$

[11]) Vgl. hierzu: Cauchy, Œuvres II, 7, S. 42ff.; L. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen **1** (1895), S. 245.

Hierin ist aber

$$\frac{\sum_{0,m}^{1,m} B_i s^i \sum_{\varrho=0}^{i-1} f_\varrho s^{\varrho+1-i}}{\sum_{0,m} B_i s^i - \sum_{0,n} A_i r^i} \qquad \frac{\sum_{0,m}^{1,m} B_i s^i \{f_0 s^{i-1} + f_1 s^{i-2} + \dots + f_{i-1}\}}{\sum_{0,m} B_i s^i - \sum_{0,n} A_i r^i}$$

$$= \frac{\sum^{1,m} B_i s^i f_0 s^{i-1} \quad (\sum^{1,m} B_i s^i - B_1 s) f_1 s^{i-2} + (\sum^{1,m} B_i s^i - \sum^{1,2} B_\lambda s^\lambda) f_2 s^{i-3} + \dots + (\sum^{1,m} B_i s^i - \sum^{1,m-1} B_\lambda s^\lambda) f_{m-1}}{\sum_{0,m} B_i s^i - \sum_{0,n} A_i r^i}$$

$$(19) \qquad = f_0 s^{i-1} + f_1 s^{i-2} + \dots + f_k s^{i-1} \quad \dots + f_{m-1} s^{i-m} \quad R,$$

und der übrigbleibende Rest R ist:

$$R = \frac{-\sum^{0,n} A_i r^i (f_0 s^{i-1} + \dots + f_{m-1} s^{i-m}) - B_1 f_1 s^{i-1} - \sum^{1,2} B_\lambda f_\lambda s^{i+\lambda-3} - \dots - \sum^{1,m-1} B_\lambda f_{m-1} s^{i}}{\sum_{0,m} B_i s^i - \sum_{0,n} A_i r^i}$$

$$= \frac{-\sum^{0,n} A_i r^i (f_0 s^{i-1} + \dots + f_{m-1} s^{i-m}) - \sum^{1,m-1} B_\lambda f_\lambda s^{i-1} - \sum^{1,m-2} B_\lambda f_{\lambda+1} s^{i-2} - \dots - B_1 f_{m-1} s}{\sum_{0,m} B_i s^i - \sum_{0,n} A_i r^i}$$

beginnt also in seiner Entwicklung nach fallenden Potenzen von s, da $k \leqq m-1$ ist, mit s^{-2}. (19) substituieren wir in (18) und führen die Integration nach s aus; da sich diese auf die unendlich große Kreiskontur bezieht, wird das einzig wirksame Glied von (19) der Term $f_k s^{-1}$ sein, die Konturintegrale über die andern Glieder verschwinden und es folgen die Gleichungen:

$$z\Big|^{t_0} = \oint_{K_\infty} \frac{r}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} f_0(\nu)\, e^{-r(\nu-x_0)}\, d\nu\, \frac{dr}{2\pi i}; \qquad \frac{\partial^k z}{\partial t^k}\Big|^{t_0} = \oint_{K_\infty} \frac{r}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} f_k(\nu)\, e^{-r(\nu-x_0)}\, d\nu\, \frac{dr}{2\pi i}$$

Es sind also die zeitlichen Anfangsbedingungen (3) erfüllt, wenn man erreichen kann, daß

$$f_i(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_\infty} \frac{r}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} e^{-r(\nu-x_0)} f_i(\nu)\, d\nu\, dr$$

wird, oder allgemein, daß

$$(20) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_\infty} \frac{r}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} e^{-r(\nu-x_0)} f(\nu)\, d\nu\, dr.$$

r ist nun durch (13) definiert, und daher ist (20) erfüllt, sobald die folgenden Gleichungen bestehen:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_x}\frac{R_1 e^{r_1(x-x_0)}}{\mathfrak{F}(r)}\int_{x_0}^{x_1} e^{-r(\nu-x_0)} f(\nu)\,d\nu\,dr = f(x);$$

$$\oint_{K_\infty}\frac{R_2 e^{r_2(x-x_0)}}{\mathfrak{F}(r)}\int_{x_0}^{x_1} e^{-r(\nu-x_0)} f(\nu)\,d\nu\,dr = 0; \tag{21}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\oint_{K_\infty}\frac{R_n e^{r_n(x-x_0)}}{\mathfrak{F}(r)}\int_{x_0}^{x_1} e^{-r(\nu-x_0)} f(\nu)\,d\nu\,dr = 0.$$

Da die erste der in (4) definierten Wurzeln $r \quad r_1$ ist, kann man die erste dieser Gleichungen auch schreiben:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_\infty}\frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)}\int_{x_0}^{x_1} e^{r(x-\nu)} f(\nu)\,d\nu\,dr = f(x). \tag{21a}$$

Wir behaupten nun, daß wir die Gleichungen (21) dadurch erfüllen können, daß wir in den Definitionsgleichungen (10) der Größen R_i für die dort noch als willkürlich angenommenen holomorphen Funktionen $\Re_i$ die folgenden Werte einsetzen:

$$\Re_0 = -f_0(r),\quad \Re_1 = -f_1(r),\quad \ldots,\quad \Re_{\mu-1} = -f_{\mu-1}(r), \tag{22}$$
$$\Re_\mu = \Re_{\mu+1} = \ldots = \Re_{n-1} = 0,$$

so daß also jenes Gleichungssystem die folgende Form annimmt:

$$\begin{aligned}
&R_1 f_0(r_1) + R_2 f_0(r_2) + \ldots + R_n f_0(r_n) = -f_0(r)\,\mathfrak{F}(r)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&R_1 f_{\mu-1}(r_1) + R_2 f_{\mu-1}(r_2) + \ldots + R_n f_{\mu-1}(r_n) = -f_{\mu-1}\,\mathfrak{F}(r)\\
&R_1 e^{ar_1} f_\mu(r_1) + R_2 e^{ar_2} f_\mu(r_2) + \ldots + R_n e^{ar_n} f_\mu(r_n) = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&R_1 e^{ar_1} f_{n-1}(r_1) + R_2 e^{ar_2} f_{n-1}(r_2) + \ldots + R_n e^{ar_n} f_{n-1}(r_n) = 0.
\end{aligned} \tag{23}$$

Dem Beweis der aus der Annahme (22) hervorgehenden Entwicklung gilt die folgende Untersuchung. Wir verfahren beim Nachweise der Gleichungen (21) nach der Cauchy-Poincaréschen Methode, indem wir die Konturintegrale auf der unendlich großen Kreiskontur abschätzen. Hierzu benötigen wir vor allen Dingen die asymptotische Darstellung der Determinante $\mathfrak{F}(r)$ und ihrer Nullstellen.

§ 6.

Die Gleichung $\mathfrak{F}(r) = 0$.

Zunächst wollen wir die asymptotischen Ausdrücke der $r_2 \ldots r_n$ in $r = r_1$ finden. Die Definitionsgleichung § 4 (4) dieser Größen lautete:

$$(1)\quad \sum_{i=1}^{n} A_i(r^i - \varrho^i) = (r^n - \varrho^n)A_n + (r^{n-1} - \varrho^{n-1})A^{n-1} + \ldots + (r - \varrho)A_1 = 0.$$

Zu ihrer Lösung setzen wir an: $\varrho = rx$ und dividieren (1) durch r^n; so folgt:

$$(1 - x^n)A_n + \frac{1}{r}A_{n-1}(1 - x^{n-1}) + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}}A_1(1 - x) = 0.$$

Für absolut große Werte der verfügbaren Variablen r gehen die Wurzeln dieser Gleichung asymptotisch in die der Gleichung $1 - x^n = 0$ über, d. h. in die n-ten Einheitswurzeln, die wir im folgenden stets mit $w^{(1)}$, $w^{(2)}, \ldots, w^{(n)}$ bezeichnen werden. Dann lauten also die asymptotischen Ausdrücke für die Wurzeln ϱ von (1):

$$(2)\qquad r_1 \simeq r\,w^{(1)};\quad r_2 \simeq r\,w^{(2)};\quad \ldots;\quad r_n \simeq r\,w^{(n)}.\quad [12])$$

In dem speziellen von uns betrachteten Falle eines geraden $n = 2\mu$ sind je zwei $w^{(i)}$ konjugiert komplex und je zwei entgegengesetzt gleich. Letzteres fällt für ungerade n fort.

Wir treffen nun eine für das folgende fundamentale[13]), von Birkhoff herrührende Einteilung der r-Ebene, indem wir ein Gebiet S derselben definieren, in dem eine solche Anordnung der $w^{(1)} \ldots w^{(n)}$ — sie möge durch untere Indizes charakterisiert werden — gefunden werden kann, daß im ganzen Gebiete S:

$$(3)\quad \Re(r\,w_1) < \Re(r\,w_2) < \ldots < \Re(r\,w_\mu) \leqq 0 \leqq \Re(r\,w_{\mu+1}) < \ldots < \Re(r\,w_n)\ [14])$$

ist. Da die w_i, oder in andrer Reihenfolge die $w^{(k)}$, konstant sind, muß sich stets ein solches Gebiet S finden lassen, in dem (3) statthat. Für die Begrenzung von S muß, wenn λ, ν irgendein Zeigerpaar bedeutet, gelten: $\Re(r\,w_\lambda) = \Re(r\,w_\nu)$; denn erst dann hört die durch (3) getroffene Zuordnung der unteren Indizes zu den oberen auf, Geltung zu haben. Auf der Randlinie ist folglich

$$\cos\left[\arg r + \frac{1}{n}2\lambda\pi\right] = \cos\left[\arg r + \frac{1}{n}2\nu\pi\right],\quad \arg r = -\frac{1}{n}(\nu + \lambda)\pi = \frac{1}{n}l\pi,$$

[12]) Wir verwenden $\simeq$ für „asymptotisch".

[13]) Gerade in der Einführung dieser Einteilung liegt ein sehr wesentlicher Fortschritt gegenüber der Freundschen Methode. Letztere führt nämlich nur bis zu $n = 4$ zum Ziel und versagt dann im allgemeinen für alle höheren n.

[14]) „$\Re$" bedeute den Realteil.

wo l jede ganze Zahl bedeuten kann. Es werden also die Gebiete S durch die Strahlen $\arg r = \frac{l}{n}\pi$ begrenzt, und dadurch die r-Ebene in $2n$ Sektoren $S_1 \dots S_{2n}$ geteilt, in deren jedem eine Beziehung der Form (3) gilt, wobei allerdings die Zuordnung der unteren Indizes zu den oberen in jedem S-Gebiete eine andere ist. Für den hier behandelten Fall $n = 2\mu$ ist schließlich sofort ersichtlich, daß die folgenden Gleichungen bestehen müssen:

$$(4) \qquad w_{\mu+1} = -w_\mu, \quad w_{\mu+2} = -w_{\mu-1}, \quad \dots, \quad w_n = -w_1.$$

In einem Sektor S wollen wir nun den asymptotischen Ausdruck für eine Wurzel der Gleichung $\mathfrak{F}(r) = 0$ suchen. Dazu greifen wir zurück auf die in § 5 (15) gestellten Randbedingungen; die ersten μ derselben gelten für den Punkt $x = 0$, die letzten μ für den Punkt $x = a$, wenn wir uns fortan den Punkt x_0 in den Nullpunkt $x = 0$ verschoben denken. Beide Gruppen normieren wir in der Weise, daß sie, nach fallenden Ordnungszahlen geordnet, jede Ordnungszahl nur einmal enthalten; dies kann, da die Randbedingungen in den Ableitungen linear sind, durch lineare Kombination derselben stets erreicht werden. Es haben also die in dieser Weise „normierten" Randbedingungen die folgende Gestalt:

$$(5) \qquad f_i(D_x)v = \alpha_i v^{(k_i)} + \sum_{j=0}^{k_i-1} \alpha_{ij} v^{(j)} \qquad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Dabei beziehen sich die μ ersten Bedingungen auf $x = 0$, die μ letzten auf $x = a$, und die Ordnung der k ist so gedacht, daß $k_0 > k_1 > \dots > k_{\mu-1}$, $k_\mu > k_{\mu+1} > \dots > k_{n-1}$ ist, während über das Verhältnis der beiden k-Folgen zueinander nichts ausgesagt wird; die α_i, α_{ij} sind gewisse konstante Koeffizienten. Nach (5) ist zu setzen:

$$(6) \qquad f_i(r) = \alpha_i r^{k_i} + \sum_{j=0}^{k_i-1} \alpha_{ij} r^j = r^{k_i}\left(\alpha_i + \alpha_{i,k_i-1}\frac{1}{r} + \dots\right) = r^{k_i}[\alpha_i],$$

wobei folgende Bezeichnung eingeführt ist: Wir verstehen unter $[\alpha]$ einen Ausdruck der Form: $[\alpha] = \alpha + \frac{\alpha_1}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2} + \dots$, der sich mit wachsendem r asymptotisch der Größe α nähert. In dieser Terminologie ist also mit Beachtung von (2):

$$f_i(r_\lambda) = (r w^{(\lambda)})^{k_i}[\alpha_i] \qquad (i = 0, 1, \dots, n-1;\ \lambda = 1, 2, \dots, n)$$

und nach § 4 (11) können wir die Gleichung $\mathfrak{F}(r) = 0$, wenn wir uns diese Determinante nach den unteren Indizes der α_i geordnet denken, asymptotisch schreiben:

$$\mathfrak{F}(r)\sim \begin{vmatrix} (rw_1)^{k_0}\,[\alpha_0] & (rw_2)^{k_0}\,[\alpha_0] & \dots & (rw_n)^{k_0}\,[\alpha_0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (rw_1)^{k_{\mu-1}}[\alpha_{\mu-1}] & (rw_2)^{k_{\mu-1}}[\alpha_{\mu-1}] & \dots & (rw_n)^{k_{\mu-1}}[\alpha_{\mu-1}] \\ e^{arw_1}(rw_1)^{k_\mu}\,[\alpha_\mu] & e^{arw_2}(rw_2)^{k_\mu}\,[\alpha_\mu] & \dots & e^{arw_n}(rw_n)^{k_\mu}\,[\alpha_\mu] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{arw_1}(rw_1)^{k_{n-1}}[\alpha_{n-1}] & e^{arw_2}(rw_2)^{k_{n-1}}[\alpha_{n-1}] & \dots & e^{arw_n}(rw_n)^{k_{n-1}}[\alpha_{n-1}] \end{vmatrix}$$

gültig für einen bestimmten Bereich S; oder es ist:

$$\mathfrak{F}(r)\simeq \prod_{i=0}^{n-1}\alpha_i r^{k_i}\prod_{j=\mu+2}^{n} e^{arw_j}e^{-arw_{\mu+1}}\Delta_0, \tag{7}$$

wobei unter Benutzung der Relationen (4) ist:

$$\Delta_0=\begin{vmatrix} [w_1^{k_0}] & [w_2^{k_0}] & \dots [w_\mu^{k_0}]\cdot e^{arw_{\mu+1}} & [w_{\mu+1}^{k_0}] \\ & & [w_{\mu+2}^{k_0}]\ e^{arw_{\mu-1}}\dots [w_n^{k_0}]\cdot e^{arw_1} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [w_1^{k_\mu-1}] & [w_2^{k_\mu-1}]\dots [w_\mu^{k_\mu-1}]\,e^{arw_{\mu+1}} & & [w_{\mu+1}^{k_\mu-1}] \\ & & [w_{\mu+2}^{k_\mu-1}]\,e^{arw_{\mu-1}}\dots [w_n^{k_\mu-1}]\,e^{arw_1} & \\ e^{arw_1}[w_1^{k_\mu}] & e^{arw_2}[w_2^{k_\mu}] & \dots [w_\mu^{k_\mu}] & e^{arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_\mu}] \\ & & [w_{\mu+2}^{k_\mu}] & \dots [w_n^{k_\mu}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{arw_1}[w_1^{k_{n-1}}] & e^{arw_2}[w_2^{k_{n-1}}] & \dots [w_\mu^{k_{n-1}}] & e^{arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_{n-1}}] \\ & & [w_{\mu+2}^{k_{n-1}}] & \dots [w_n^{k_{n-1}}] \end{vmatrix}$$

Gemäß dem Ansatz (3) können wir also für hinreichend großes $|r|$, unter ε generell eine für $|r|\to\infty$ verschwindende Größe verstanden, Δ_0 schreiben:

$$\Delta_0\sim\begin{vmatrix} [w_1^{k_0}] & [w_2^{k_0}] & \dots [w_\mu^{k_0}] & e^{arw_{\mu+1}} & [w_{\mu+1}^{k_0}] & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [w_1^{k_\mu-1}] & [w_2^{k_\mu-1}]\dots [w_\mu^{k_\mu-1}] & e^{arw_{\mu+1}} & & [w_{\mu+1}^{k_\mu-1}] & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots [w_\mu^{k_\mu}] & & e^{arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_\mu}] & [w_{\mu+2}^{k_\mu}] & \dots & [w_n^{k_\mu}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots [w_\mu^{k_{n-1}}] & & e^{arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_{n-1}}] & [w_{\mu+2}^{k_{n-1}}] & \dots & [w_n^{k_{n-1}}] \end{vmatrix}$$

Wenn wir diese Determinante nach den Determinanten der ersten μ Zeilen entwickeln, so tritt zunächst ein Glied mit $e^{2arw_{\mu+1}}$ auf, das sich in dem Faktor:

$$[A]\quad \begin{vmatrix} [w_1^{k_0}] & [w_2^{k_0}] & \dots [w_\mu^{k_0}] \\ [w_1^{k_1}] & [w_2^{k_1}] & \dots [w_\mu^{k_1}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [w_1^{k_{\mu-1}}] & [w_2^{k_{\mu-1}}] & \dots [w_\mu^{k_{\mu-1}}] \end{vmatrix} \begin{vmatrix} [w_{\mu+1}^{k_\mu}] & [w_{\mu+2}^{k_\mu}] & \dots [w_n^{k_\mu}] \\ [w_{\mu+1}^{k_{\mu+1}}] & [w_{\mu+2}^{k_{\mu+1}}] & \dots [w_n^{k_{\mu+1}}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [w_{\mu+1}^{k_{n-1}}] & [w_{\mu+2}^{k_{n-1}}] & \dots [w_n^{k_{n-1}}] \end{vmatrix} \tag{8}$$

multipliziert; ferner entsteht ein Glied, das weder $e^{arw_{\mu+1}}$, noch eine der Größen ε enthält, und das lautet:

$$[B] = \begin{vmatrix} [w_1^{k_0}] & [w_2^{k_0}] & \dots [w_{\mu-1}^{k_0}] & [w_{\mu+1}^{k_0}] & [w_\mu^{k_\mu}] & [w_{\mu+2}^{k_\mu}] & \dots [w_n^{k_\mu}] \\ [w_1^{k_1}] & [w_2^{k_1}] & \dots [w_{\mu-1}^{k_1}] & [w_{\mu+1}^{k_1}] & [w_\mu^{k_\mu-1}] & [w_{\mu+2}^{k_\mu-1}] & \dots [w_n^{k_\mu-1}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [w_1^{k_\mu-1}] & [w_2^{k_\mu-1}] & \dots [w_{\mu-1}^{k_\mu-1}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu-1}] & [w_\mu^{k_n-1}] & [w_{\mu+2}^{k_n-1}] & \dots [w_n^{k_n-1}] \end{vmatrix}$$

Schließlich erscheinen Glieder, die in einer Spalte den Faktor $e^{arw_{\mu+1}}$ haben und mindestens eine aus Größen ε bestehende Spalte aufweisen. Erinnern wir uns nun, daß die ε nach ihrer Definition einen der Faktoren $e^{arw_1}, \dots, e^{arw_{\mu-1}}$ enthielten, so ist ersichtlich, daß die letztbezeichneten Glieder in der Entwicklung von Δ_0 einen der Faktoren $e^{ar(w_{\mu+1}+w_{\mu-1})}, \dots,$ $e^{ar(w_{\mu+1}+w_1)}$ enthalten, also wegen der in (3) getroffenen Voraussetzung mit Faktoren multipliziert sind, die für genügend großes $|r|$ beliebig klein werden. Wir fassen daher diese Entwicklungsterme gemäß unserer generellen Bezeichnung in ein Glied ε zusammen und finden:

$$\Delta_0 = e^{2arw_{\mu+1}}[A] - [B] + \varepsilon. \tag{10}$$

Die asymptotische Lage der Nullstellen von $\mathfrak{F}(r)$ fällt mit der der Wurzeln von $\Delta_0 = 0$ zusammen. Nun sind letztere in der Grenze bestimmt durch:

$$e^{2arw_{\mu+1}} = \frac{[B]}{[A]}. \tag{11}$$

Wählen wir $|r|$ hinreichend groß, so können wir in $[A]$ und $[B]$ für die asymptotische Betrachtung die Glieder in $\frac{1}{r}$ vernachlässigen, und $[A]$ durch A, $[B]$ durch B ersetzen, wo A, B aus $[A]$, $[B]$ hervorgehen, indem man in den Gliedern dieser Determinantenprodukte die Symbole der eckigen Klammern [ ] wegläßt. Es liegen also die gesuchten Wurzeln von $\mathfrak{F}(r)$ in der Grenze für $|r| \to \infty$ bei den durch die Gleichung:

$$e^{2arw_{\mu+1}} = \frac{B}{A} \tag{11a}$$

bestimmten Stellen r der komplexen r-Ebene. Wir treffen jetzt die fundamentale Annahme, daß die beiden Größen A und B von Null verschieden seien. Wäre nämlich $A \neq 0$, $B = 0$, so würde für groß werdendes $|r|$ schließlich $\mathfrak{F}(r)$ keine Nullstellen mehr besitzen und im Unendlichen sogar durchweg unendlich groß werden; es wäre also eine asymptotische Darstellung der „Eigenwerte" unmöglich. Wäre aber $A = 0$, $B \neq 0$, so würde: $\mathfrak{F}(r) \sim \prod_{i=0}^{n-1} a_i r^{k_i} \prod_{j=\mu+2}^{n} e^{arw_j} \{ e^{arw_{\mu+1}}[0] - [B] e^{-arw_{\mu+1}} + \varepsilon \}$

sein, und müßte man, um die asymptotische Lage der Nullstellen von $\mathfrak{F}(r)$ zu untersuchen, auch die Glieder in $\frac{1}{r}$ berücksichtigen, was wir wegen der auftretenden Komplikationen vermeiden wollen. Das gleiche trifft für den Fall $A = B = 0$ zu. Die beiden Voraussetzungen $A \neq 0$, $B \neq 0$, müssen durch die Exponenten $k_0 \ldots k_{n-1}$ befriedigt werden, sind also aufs engste mit den Randbedingungen verknüpft. Sind sie erfüllt, so nennen wir die Randbedingungen regulär. Es ist dann nach (7):

$$(12) \qquad \mathfrak{F}(r) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} a_i r^{k_i} \prod_{j=\mu+2}^{n} e^{arw_j} \left\{ [A] e^{arw_{\mu+1}} - [B] e^{-arw_{\mu+1}} + \varepsilon \right\},$$

folgt also aus (11a) für die asymptotische Lage der Nullstellen:

$$2arw_{\mu+1} = \lg\left(\frac{B}{A}\right) + 2l\pi i + \frac{E}{r} = \lg\left|\frac{B}{A}\right| + i\left\{2l\pi - \arg\left(\frac{B}{A}\right)\right\} + \frac{E}{r};$$

$$(13) \qquad r \simeq \frac{\lg\left|\frac{B}{A}\right|}{2aw_{\mu+1}} + i\,\frac{2l\pi + \arg\left(\frac{B}{A}\right)}{2aw_{\mu+1}} + \frac{E'}{r}.$$

Hier sind E, E' endliche Größen, l eine ganze Zahl, und zwar muß l, da $\lg\left|\frac{B}{A}\right|$ nach Voraussetzung endlich ist, eine sehr große ganze Zahl sein, damit der absolute Betrag der Wurzel r so groß werde, daß eben die Darstellung (13), die ja nur asymptotisch ist, zulässig werde. Es nähert sich nach (13) $rw_{\mu+1}$ für großes l der imaginären Achse, bzw. einer Parallelen dazu im Abstande $\frac{1}{2a}\lg\left|\frac{B}{A}\right|$. Das Argument von $rw_{\mu+1}$ geht gegen 90^0, es ist also die Richtung der Wurzel r das Spiegelbild derjenigen von $w_{\mu+1}$ an der Achse $\arg = 45^0$. Nun wird ein jedes $w^{(i)}$ in je zwei der $n = 2\mu$ Sektoren, in die die r-Ebene zerfällt, die Rolle eines $w_{\mu+1}$ spielen, so daß (13) n verschiedene Wurzeln umfaßt, die man erhält, wenn man $w_{\mu+1}$ sukzessive durch jedes der $w^{(i)}$ ersetzt. Wir bezeichnen für den Augenblick diese Wurzeln durch $\bar{r}_1 \ldots \bar{r}_n$ und erwähnen noch, daß man sie alle dadurch erhält, daß man irgendeine von ihnen sukzessive mit den Einheitswurzeln $w^{(1)}, \ldots, w^{(n)}$ multipliziert[15]).

Wir haben in der folgenden Figur 1 die Lage dieser Wurzeln $\bar{r}$ von $\mathfrak{F}(r) = 0$ eingezeichnet, unter der speziellen Annahme $n = 6$. Die Ebene ist die komplexe r-Ebene. Es sind die n Richtungen der Einheitswurzeln aufgetragen, und zu jeder derselben, als $w_{\mu+1}$ aufgefaßt, die zugehörige Wurzel $\bar{r}_i$, und zwar so, daß der Einheitswurzel $w^{(i)} = w_{\mu+1}$ die Wurzel $r^{(i)}$ von $\mathfrak{F}(r) = 0$ entspricht. Die Figur erläutert uns gleichzeitig einige

[15]) Wir können nicht eigentlich sagen, daß die Wurzeln auf die $\bar{r}$-Strahlen selbst zu liegen kommen, sondern nur, daß sie asymptotisch in beliebig kleinen Winkelräumen, die diese Strahlen umschließen, enthalten sind.

Eigenschaften der Einteilung in die Gebiete S. Für ungerade $\mu = \frac{n}{2}$ fallen die asymptotischen Strahlen der Wurzeln von $\mathfrak{F}(r)$ in die Halbierungsgeraden der Sektoren zwischen den Einheitswurzeln, für gerades μ

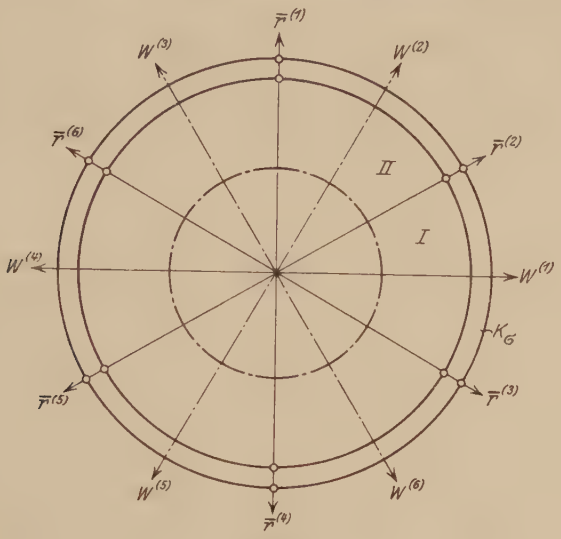

Fig. 1.

fallen sie mit den Strahlen der Einheitswurzeln selbst zusammen. Betrachten wir nun für ungerades μ ($\mu = 3$) zwei längs eines $\bar{r}$-Strahles zusammenstoßende S-Gebiete, etwa die Sektoren I, II der Fig. 1, so ist, solange die Variable r sich in diesen bewegt:

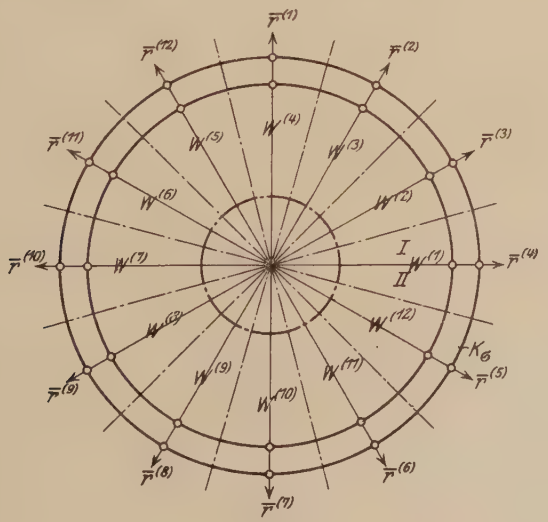

Fig. 2.

in I: $\Re(rw^{(4)}) < \Re(rw^{(3)}) < \Re(rw^{(5)}) \leqq 0 \leqq \Re(rw^{(2)}) < \Re(rw^{(6)}) < \Re(rw^{(1)})$;

in II: $\Re(rw^{(3)}) < \Re(rw^{(4)}) < \Re(rw^{(2)}) \leqq 0 \leqq \Re(rw^{(5)}) < \Re(rw^{(1)}) < \Re(rw^{(6)})$.

Man sieht also leicht, daß allgemein die an einem $\bar{r}$-Strahl zusammenstoßenden S-Gebiete sich dadurch unterscheiden, daß in ihnen w_μ, $w_{\mu-1}$ sich wechselseitig vertauschen. In welcher Folge sich dabei die anderen w_i ändern, ist für das folgende unwesentlich. Ähnliches gilt auch für gerade μ wie die für $n = 12$ gezeichnete Fig. 2 erkennen läßt. Es ist beispielsweise, wenn r in den Gebieten I, II der Fig. 2 liegt:

in I: $$\begin{aligned}\Re(rw^{(7)}) < \Re(rw^{(6)}) < \Re(rw^{(8)}) < \Re(rw^{(5)}) < \Re(rw^{(9)}) < \Re(rw^{(4)}) \\ \leqq 0 \leqq \Re(rw^{(10)}) < \Re(rw^{(3)}) < \Re(rw^{(11)}) < \Re(rw^{(2)}) \\ < \Re(rw^{(12)}) < \Re(rw^{(1)});\end{aligned}$$

in II: $$\begin{aligned}\Re(rw^{(7)}) < \Re(rw^{(8)}) < \Re(rw^{(6)}) < \Re(rw^{(9)}) < \Re(rw^{(5)}) < \Re(rw^{(10)}) \\ \leqq 0 \leqq \Re(rw^{(4)}) < \Re(rw^{(11)}) < \Re(rw^{(3)}) < \Re(rw^{(12)}) \\ < \Re(rw^{(2)}) < \Re(rw^{(1)}).\end{aligned}$$

Also auch hier gilt für zwei durch einen $\bar{r}$-Strahl getrennte S-Gebiete, daß in ihnen w_μ und $w_{\mu+1}$, d. i. in unserem Falle: $w^{(4)}$ und $w^{(10)}$, sich wechselseitig vertauschen. Die zu gleichem l gehörigen Wurzeln $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n$ in (13) haben gleichen absoluten Betrag, liegen also auf einem Kreise um den Nullpunkt, wenn l eine hinreichend große ganze Zahl ist. Die Durchschnittspunkte dieses Kreises mit den für die asymptotische Lage der Wurzeln gefundenen $\bar{r}$-Strahlen geben in der Grenze die Punkte, in denen die Wurzeln von $\mathfrak{F}(r)$ liegen. Wächst die ganze Zahl l, so erhalten wir weitere Kreise, die einen endlichen Abstand voneinander haben, der sich asymptotisch dem Werte $\frac{\pi}{a}$ nähert. Jeder dieser Kreise enthält n Wurzeln. Wir können also die Wurzeln r der Gleichung $\mathfrak{F}(r) = 0$ zu Zyklen zusammenfassen, indem wir in einem Zyklus alle Wurzeln begreifen, die in der Grenze auf einen gemeinsamen Kreis zu liegen kommen; diese ergeben gleichzeitig denselben Wert von $F(r)$, denn gehen wir etwa aus von einer bestimmten dieser Wurzeln: r_k, deren absoluter Betrag schon recht groß sei; ihr entspricht ein bestimmter Wert $F(r_k, 0)$ von $F(r, 0)$. Dann sind die Wurzeln ϱ der Gleichung: $F(r_k, 0) - F(\varrho, 0) = 0$ nach (2) dargestellt durch: $r_k w^{(1)}, \ldots, r_k w^{(n)}$; diese sind aber gerade die anderen Wurzeln r_λ des Zyklus $r_1 \ldots r_n$, der zu r_k gehört; es ergeben daher die Wurzeln desselben Zyklus den gleichen Wert von $F(r, 0)$. Nun ist: $-F(r, 0) = \lambda$ in der gewöhnlichen Terminologie der Parameter der Differentialgleichung § 5 (14), und wenn r eine Wurzel der Gleichung $\mathfrak{F}(r) = 0$ ist, nimmt λ die sog. Eigenwerte an. Es gehört somit nach dem Gesagten zu jedem Zyklenkreis nur ein Eigenwert λ. Da die Zyklenkreise im Un-

endlichen stets um ein endliches Stück voneinander abstehen, häufen sich die Wurzeln von $\mathfrak{F}(r) = 0$ daselbst nicht, und es ist wohl möglich, ein Kreissystem K_σ mit wachsenden Radien um den Nullpunkt zu legen, so daß jeder Punkt dieser Kreise von den Wurzeln von $\mathfrak{F}(r) = 0$ einen positiven Minimalabstand hat. Wir können ferner diese Wurzeln r_i durch Sicherheitskreise von genügend kleinem Radius aus der r-Ebene ausschließen, und dabei den Radius so klein wählen, daß für großes r jeder dieser Kreise nur eine Wurzel von $\mathfrak{F}(r)$ in sich schließt.

§ 7.

Der erste Konvergenzbeweis.

Nunmehr gehen wir an den Nachweis der Formeln (21). Lösen wir unser Gleichungssystem § 5 (23) nach den R_i auf und berücksichtigen § 6 (2), so erhalten wir in asymptotischer Darstellung:

$$R_1 \sim \begin{vmatrix} -f_0(rw^{(1)}) & f_0(rw^{(2)}) & \dots & f_0(rw^{(n)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -f_{\mu-1}(rw^{(1)}) & f_{\mu-1}(rw^{(2)}) & \dots & f_{\mu-1}(rw^{(n)}) \\ 0 & e^{arw^{(2)}} f_\mu(rw^{(2)}) & \dots & e^{arw^{(n)}} f_\mu(rw^{(n)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & e^{arw^{(2)}} f_{n-1}(rw^{(2)}) & \dots & e^{arw^{(n)}} f_{n-1}(rw^{(n)}) \end{vmatrix},$$

oder, wenn wir die Randbedingungen als normiert annehmen und daher die Ausdrücke § 6 (6) heranziehen:

$$R_1 \sim \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i r^{k_i} \begin{vmatrix} -[w^{(1)k_0}] & [w^{(2)k_0}] & \dots & [w^{(n)k_0}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -[w^{(1)k_\mu - 1}] & [w^{(2)k_\mu - 1}] & \dots & [w^{(n)k_\mu - 1}] \\ 0 & e^{arw^{(2)}}[w^{(2)k_\mu}] & \dots & e^{arw^{(n)}}[w^{(n)k_\mu}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & e^{arw^{(2)}}[w^{(2)k_n - 1}] & \dots & e^{arw^{(n)}}[w^{(n)k_n - 1}] \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i r^{k_i} \Delta_1,$$

wobei Δ_1 die letztauftretende Determinante bezeichnen möge. Hierin ist $w^{(1)} = 1$ und sind im übrigen die $w^{(i)}$ nach einem für die ganze r-Ebene einheitlichen Prinzip, etwa den Argumenten, geordnet. Ebenso schreiben wir $\mathfrak{F}(r)$ nach den oberen Indizes der $w^{(i)}$ geordnet:

$$(15)\qquad \mathfrak{F}(r)\sim\prod_{i=0}^{n-1}\alpha_i r^{k_i}\begin{vmatrix} [w^{(1)k_0}] & [w^{(2)k_0}] & \dots & [w^{(n)k_0}]\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ [w^{(1)k_\mu-1}] & [w^{(2)k_\mu-1}] & \dots & [w^{(n)k_\mu-1}]\\ e^{arw^{(1)}}[w^{(1)k_\mu}] & e^{arw^{(2)}}[w^{(2)k_\mu}] & \dots & e^{arw^{(n)}}[w^{(n)k_\mu}]\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ e^{arw^{(1)}}[w^{(1)k_{n-1}}] & e^{arw^{(2)}}[w^{(2)k_{n-1}}] & \dots & e^{arw^{(n)}}[w^{(n)k_{n-1}}]\end{vmatrix}$$
$$=\prod_{i=0}^{n-1}\alpha_i r^{k_i}\,\Delta_0.$$

Dabei stimmt dieses Δ_0, da die $w^{(\nu)}$ sich von den w_ν nur durch die Reihenfolge unterscheiden, bis auf das Vorzeichen mit der im vorigen Paragraphen als Δ_0 bezeichneten Determinante überein.

Wir entwickeln $\mathfrak{F}(r)$ und R_1 nach den Elementen der ersten Spalte. Bedeuten $Q_0, \dots, Q_{n-1}$ die Unterdeterminanten von Δ_0 bezüglich der Elemente der ersten Spalte, versehen mit dem Vorzeichen, das ihnen bei dieser Entwicklung nach der ersten Kolonne zukommt, so ist:

$$\Delta_0 = [Q_0] + [Q_1] + \dots + [Q_{\mu-1}] \quad e^{ar}\{[Q_\mu] + [Q_{\mu+1}] + \dots + [Q_{n-1}]\};$$
$$\Delta_1 = -\{[Q_0] + [Q_1] + \dots + [Q_{\mu-1}]\},$$

also:

$$(16)\qquad \frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)}\sim\frac{\Delta_1}{\Delta_0}=\frac{-1}{1+e^{ar}\Phi};\qquad \Phi=\frac{[Q_\mu]+[Q_{\mu+1}]+\dots+[Q_{n-1}]}{[Q_0]+[Q_1]+\dots+[Q_{\mu-1}]}=\frac{D_1}{D_2}$$

und wir setzen dabei:

$$(17)\qquad D_1=[Q_\mu]+[Q_{\mu+1}]+\dots+[Q_n]=\begin{vmatrix} 0 & [w^{(2)k_0}] & \dots & [w^{(n)k_0}]\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & [w^{(2)k_\mu-1}] & \dots & [w^{(n)k_\mu-1}]\\ [1] & e^{arw^{(2)}}[w^{(2)k_\mu}] & \dots & e^{arw^{(n)}}[w^{(n)k_\mu}]\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ [1] & e^{arw^{(2)}}[w^{(2)k_{n-1}}] & \dots & e^{arw^{(n)}}[w^{(n)k_{n-1}}]\end{vmatrix}$$

$$D_2=[Q_0]+[Q_1]+\dots+[Q_{\mu-1}]=\begin{vmatrix} [1] & [w^{(2)k_0}] & \dots & [w^{(n)k_0}]\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ [1] & [w^{(2)k_\mu-1}] & \dots & [w^{(n)k_\mu-1}]\\ 0 & e^{arw^{(2)}}[w^{(2)k_\mu}] & \dots & e^{arw^{(n)}}[w^{(n)k_\mu}]\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & e^{arw^{(2)}}[w^{(2)k_{n-1}}] & \dots & e^{arw^{(n)}}[w^{(n)k_{n-1}}]\end{vmatrix}$$

Auf die Betrachtung dieser Größen wird es uns im folgenden zunächst ankommen.

Wir teilen nun die komplexe r-Ebene in zwei Halbebenen, in denen bzw. $\Re(r) \lessgtr 0$ und $\Re(r) \gtrless 0$ ist. Es sind dies die beiden Teile, die durch die imaginäre r''-Achse der r-Ebene erzeugt werden. Da $w^{(1)} = 1$ ist, ist in den entstehenden beiden Gebieten $\Re(r w^{(1)})$ entweder positiv oder negativ, d. h. aber nach Definition der w_ν: es gehört $w^{(1)} = 1$ in dem einen Bereich zu den $w_1 \dots w_\mu$, im anderen zu den $w_{\mu+1} \dots w_n$. Die unteren Indizes an den Einheitswurzeln wählen wir wieder so, daß in den $2n$ S-Gebieten die Beziehung § 6 (3) gilt.

Wir dürfen dann in jedem S-Gebiet die Determinanten D_1 und D_2 nach den unteren Indizes, d. h. den w_ν ordnen, wobei ja das Verhältnis derselben, auf das es hier allein ankommt, ungeändert bleibt. Es tritt aber in der Spalte, die dem $w^{(1)}$ entspricht, eine Unsymmetrie im Bau von D_1 und D_2 auf; daher schreiben wir diese Kolonne als erste und ordnen jetzt erst $w^{(2)} \dots w^{(n)}$ nach den unteren Indizes $1 \dots n$. Wir schreiben der Einfachheit halber diese alle hin, und setzen fortan voraus, daß dabei die dem $w^{(1)}$ entsprechende Spalte übergangen wird, was wir durch eine geschlängelte Vertikallinie an der betreffenden Stelle andeuten. Wir untersuchen die erste Halbebene:

Fall I. $\Re(r) < 0$. $w^{(1)}$ gehört also zu den $w_1 \dots w_\mu$. Wir finden unter Benutzung der üblichen Umformungen die folgenden Darstellungen:

$$(18a) \qquad D_1 \simeq \prod_{\mu+1}^{n} e^{a r w_i}$$

$$\begin{vmatrix}
[w_1^{k_0}] \dots [w_\mu^{k_0}] & e^{a r w_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_0}] & e^{a r w_{\mu+2}}[w_{\mu+2}^{k_0}] & \dots & e^{-a r w_n}[w_n^{k_0}] \\
\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\
[w_1^{k_{\mu-1}}] \dots [w_\mu^{k_{\mu-1}}] & e^{-a r w_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_{\mu-1}}] & e^{-a r w_{\mu+2}}[w_{\mu+2}^{k_{\mu-1}}] & \dots & e^{-a r w_n}[w_n^{k_{\mu-1}}] \\
e^{a r w_1}[w_1^{k_\mu}] \dots e^{a r w_\mu}[w_\mu^{k_\mu}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu}] & [w_{\mu+2}^{k_\mu}] & \dots & [w_n^{k_\mu}] \\
\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\
e^{a r w_1}[w_1^{k_{n-1}}] \dots e^{a r w_\mu}[w_\mu^{k_{n-1}}] & [w_{\mu+1}^{k_{n-1}}] & [w_{\mu+2}^{k_{n-1}}] & \dots & [w_n^{k_{n-1}}]
\end{vmatrix}$$

$$\simeq \prod_{\mu+1}^{n} e^{a r w_i} \{(-1)^\mu P_1 e^{-a r w_{\mu+1}} + \varepsilon\},$$

wobei

$$P_1 = \begin{vmatrix}
[w_1^{k_0}] \dots [w_\mu^{k_0}] & [w_{\mu+1}^{k_0}] & [1] [w_{\mu+2}^{k_\mu}] \dots [w_n^{k_\mu}] \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
[w_1^{k_{\mu-1}}] \dots [w_\mu^{k_{\mu-1}}] & [w_{\mu+1}^{k_{\mu-1}}] & [1] [w_{\mu+2}^{k_{n-1}}] \dots [w_n^{k_{n-1}}]
\end{vmatrix}.$$

Dabei haben wir die Glieder der obigen Determinantenentwicklung, die mit wachsendem $|r|$ verschwinden, alle in den Term ε zusammengefaßt. Daß bei dieser Entwicklung keine weiteren Glieder ausschlaggebend sind,

als das angegebene, ist daraus ersichtlich, daß alle anderen Terme e-Potenzen als Koeffizienten enthalten, in deren Exponenten die Realteile wesentlich negativ sind, die also für $r \to \infty$ verschwinden. Ebenso ist:

$$(18b) \qquad D_2 \simeq \prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}$$

$$\begin{array}{llllllll}
[1] & [w_1^{k_0}] & \cdots & [w_\mu^{k_0}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_0}] & e^{-arw_{\mu+2}}[w_{\mu+2}^{k_0}] & \cdots & e^{-arw_n}[w_n^{k_0}] \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
[1] & [w_1^{k_\mu-1}] & \cdots & [w_\mu^{k_\mu-1}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_\mu-1}] & e^{-arw_{\mu+2}}[w_{\mu+1}^{k_\mu-1}] & \cdots & e^{-arw_n}[w_n^{k_\mu-1}] \\
0 & e^{arw_1}[w_1^{k_\mu}] & \cdots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_\mu}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu}] & [w_{\mu+2}^{k_\mu}] & \cdots & [w_n^{k_\mu}] \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & e^{arw_1}[w_1^{k_n-1}] & \cdots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_n-1}] & [w_{\mu+1}^{k_n-1}] & [w_{\mu+2}^{k_n-1}] & \cdots & [w_n^{k_n-1}]
\end{array}$$

$$\simeq \prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}\{P_2 - P_3 e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})} + \varepsilon\},$$

wobei

$$P_2 = \begin{vmatrix} [1]\ [w_1^{k_0}] & \cdots & [w_\mu^{k_0}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu}] & [w_{\mu+2}^{k_\mu}] & \cdots & [w_n^{k_\mu}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [1]\ [w_1^{k_\mu-1}] & \cdots & [w_\mu^{k_\mu-1}] & [w_{\mu+1}^{k_n-1}] & [w_{\mu+2}^{k_n-1}] & \cdots & [w_n^{k_n-1}] \end{vmatrix},$$

$$P_3 = \begin{vmatrix} [1]\ [w_1^{k_0}] & \cdots & [w_{\mu-1}^{k_0}] & [w_{\mu+1}^{k_0}] & [w_\mu^{k_\mu}] & [w_{\mu-2}^{k_\mu}] & \cdots & [w_n^{k_\mu}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [1]\ [w_1^{k_\mu-1}] & \cdots & [w_{\mu-1}^{k_\mu-1}] & [w_{\mu-1}^{k_\mu-1}] & [w_\mu^{k_n-1}] & [w_{\mu-2}^{k_n-1}] & \cdots & [w_n^{k_n-1}] \end{vmatrix}.$$

Daß in dieser Determinantenentwickelung keine weiteren Glieder maßgebend sind, folgt aus dem gleichen Grunde wie oben. Man sieht übrigens, daß die hier mit P_2, P_3 benannten Determinanten bis auf das Vorzeichen identisch sind mit den in § 6 als $[A], [B]$ bezeichneten. Es wird also:

$$(18c) \qquad \Phi = \frac{D_1}{D_2} \simeq \frac{(-1)^\mu P_1 e^{-arw_{\mu+1}}}{P_2 - P_3 e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})}} = \frac{(-1)^\mu P_1}{P_2 e^{arw_{\mu+1}} - P_3 e^{arw_\mu}}.$$

Dieses Verhältnis ist somit in der betrachteten Halbebene mit Ausnahme einzelner Pole stets beschränkt; letztere liegen an den Nullstellen des Nenners, stimmen mithin mit den Wurzeln der Gleichung:

$$e^{ar(w_{\mu+1} - w_\mu)} = \frac{P_3}{P_2} = \frac{[B]}{[A]}$$

überein, d. h. liegen an den schon in § 6 berechneten und durch Sicherheitskreise ausgeschlossenen Nullstellen von $\mathfrak{F}(r)$. Wir können also, wie dort, eine Folge von Integrationskreisen K_n so legen, daß sie in allen Punkten von den Sicherheitskreisen einen positiven Minimalabstand haben; es bleibt dann in der betreffenden Halbebene in allen Punkten der Integrationskontur die Größe Φ endlich und beschränkt.

Fall II. $w^{(1)}=1$ gehört zu den $w_{\mu+1}\dots w_n$ der S-Gebieten, die in der betrachteten Halbebene liegen. Wir wenden die gleiche Schreibweise an, wie im vorigen Falle, und finden:

$$D_1 \simeq \frac{1}{e^{ar}} \prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}$$

$$\begin{array}{llllll}
[w_1^{k_0}] & \dots & [w_\mu^{k_0}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_0}] & e^{-arw_{\mu+2}}[w_{\mu+2}^{k_0}] & \dots e^{-arw_n}[w_n^{k_0}] \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
[w_1^{k_\mu-1}] & \dots & [w_\mu^{k_\mu-1}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_\mu-1}] & e^{-arw_{\mu+2}}[w_{\mu+2}^{k_\mu-1}] & \dots e^{-arw_n}[w_n^{k_\mu-1}] \\
w_1[w_1^{k_\mu}] & \dots e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_\mu}] & & [w_{\mu+1}^{k_\mu}] & [w_{\mu+2}^{k_\mu}] & \dots [w_n^{k_\mu}] \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
w_1[w_1^{k_n-1}] & \dots e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_n-1}] & & [w_{\mu+1}^{k_n-1}] & [w_{\mu+2}^{k_n-1}] & \dots [w_n^{k_n-1}]
\end{array}$$

Der Nenner e^{ar} kommt dadurch hinein, daß in D_1 die dem $w^{(1)}$ entsprechende Kolonne diesen Faktor nicht enthält, er daher im Zähler bei der Schreibung $\prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}$ einmal zuviel auftritt. Also ist weiter:

$$D_1 \simeq \frac{1}{e^{ar}} \prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}\{P_2' - P_3' e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})} + \varepsilon\}(-1)^\mu, \tag{19a}$$

wobei:

$$P_2' = \begin{vmatrix} [w_1^{k_0}] & [w_2^{k_0}] & \dots [w_\mu^{k_0}] & [1] & [w_{\mu+1}^{k_\mu}] \dots [w_n^{k_\mu}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [w_1^{k_\mu-1}] & [w_2^{k_\mu-1}] \dots [w_\mu^{k_\mu-1}] & & [1] & [w_{\mu+1}^{k_n-1}] \dots [w_n^{k_n-1}] \end{vmatrix}$$

$$P_3' = \begin{vmatrix} [w_1^{k_0}] & \dots [w_{\mu-1}^{k_0}] & [w_{\mu+1}^{k_0}] & [1] & [w_\mu^{k_\mu}] & [w_{\mu+2}^{k_\mu}] \dots [w_n^{k_\mu}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [w_1^{k_\mu-1}] & \dots [w_{\mu-1}^{k_\mu-1}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu-1}] & [1] & [w_\mu^{k_n-1}] & [w_{\mu+2}^{k_n-1}] \dots [w_n^{k_n-1}] \end{vmatrix}.$$

Es sind also P_2' und P_3' ebenso wie P_2, P_3 bis auf das Vorzeichen identisch mit $[A]$, $[B]$; schließlich wird in ganz analoger Weise:

$$D_2 \simeq \frac{1}{e^{ar}} \prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i} \tag{19b}$$

$$\begin{array}{llllll}
[w_1^{k_0}] & \dots & [w_\mu^{k_0}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_0}] & e^{-arw_{\mu+2}}[w_{\mu+2}^{k_0}] & \dots e^{-arw_n}[w_n^{k_0}] \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
[w_1^{k_\mu-1}] & \dots & [w_\mu^{k_\mu-1}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_\mu-1}] & e^{-arw_{\mu+2}}[w_{\mu+2}^{k_\mu-1}] & \dots e^{-arw_n}[w_n^{k_\mu-1}] \\
w_1[w_1^{k_\mu}] & \dots e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_\mu}] & & [w_{\mu+1}^{k_\mu}] & [w_{\mu+2}^{k_\mu}] & \dots [w_n^{k_\mu}] \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
w_1[w_1^{k_n-1}] & \dots e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_n-1}] & & [w_{\mu+1}^{k_n-1}] & [w_{\mu+2}^{k_n-1}] & \dots [w_n^{k_n-1}]
\end{array}$$

$$\simeq \frac{1}{e^{ar}} \prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}\{P_1' e^{arw_\mu} + \varepsilon\},$$

wobei P_1' eine den obigen ähnliche, jedenfalls endliche Determinante bedeutet, die im übrigen für uns belanglos ist. Setzen wir also den Ausdruck Φ zusammen, so wird:

$$\Phi = \frac{D_1}{D_2} \simeq \frac{(-1)^\mu \{P_2' - P_3' e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})}\}}{P_1' e^{ar w_\mu}}. \tag{19c}$$

Dieses Verhältnis ist auf der Integrationskontur im allgemeinen unendlich groß, weil die im Nenner stehende Größe $e^{ar w_\mu}$ außerhalb der die Begrenzung der S-Gebiete bildenden Strahlen mit großem $|r|$ beliebig klein wird. Auf diesen Strahlen selbst wird Φ in unserer asymptotischen Betrachtungsweise endlich, da dort $\Re(r w_\mu) = \Re(r w_{\mu+1}) = 0$ ist. Schließlich verschwindet Φ in einer Anzahl diskreter Punkte, die sich als die Wurzeln der Gleichung:

$$e^{ar(w_{\mu+1} - w_\mu)} = \frac{P_3'}{P_2'} = \frac{[B]}{[A]},$$

also als die durch die Sicherheitskreise ausgeschiedenen Nullstellen von $\mathfrak{F}(r)$ aufzeigen. Auf der Integrationskontur ist daher gemäß der Voraussetzung über deren Lage Φ stets von Null verschieden, im übrigen aber endlich oder unendlich groß.

Einer besonderen Betrachtung bedürfen die vier Gebiete S, die um die imaginäre r''-Achse liegen, und in denen diese den einen Begrenzungsstrahl bildet. Zählt man die S-Sektoren von der reellen Achse an aufwärts mit wachsendem Argument, und beachtet man, daß ihre Anzahl $2n$ ist, also daß jeder Sektor den Winkelraum $\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{2\mu}$ umspannt, so sieht man, daß die vier in Frage kommenden Gebiete die Sektoren S_μ, $S_{\mu+1}$, $S_{3\mu}$, $S_{3\mu+1}$ sind. Sie sind deswegen besonders zu behandeln, weil auf ihrer oberen bzw. unteren Begrenzung $\Re(r) = 0$ wird, also $w^{(1)} = 1$ als w_μ oder $w_{\mu+1}$ fungiert. Betrachten wir erst die Sektoren $S_{\mu-1}$, $S_{3\mu}$ der negativen Halbebene, so ist in ihnen $w^{(1)} = w_\mu$. Wir können daher die Determinanten D_1, D_2 wie oben im Falle I aufstellen, haben aber zu beachten, daß die vertikale Wellenlinie jetzt gerade die Kolonne mit w_μ kassiert; es lauten daher die entsprechenden Darstellungen:

$$D_1 \simeq \prod_{\mu+1}^{n} e^{ar w_i} \{(-1)^\mu P_1 e^{-ar w_{\mu+1}} + \varepsilon\}; \qquad D_2 \simeq \prod_{\mu+1}^{n} e^{ar w_i} \{P_2 + \varepsilon\};$$

$$\Phi \simeq (-1)^\mu \frac{P_1}{P_2} e^{-ar w_{\mu+1}};$$

es ist daher Φ stets beschränkt, konvergiert außerhalb der imaginären Achse gegen Null, und hat auf derselben den endlichen Wert $\frac{P_1}{P_2}$, mithin ist nach (16):

$$\frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)} \sim \frac{-1}{1-e^{ar}\Phi} \sim \frac{-1}{1+\frac{P_1}{P_2}e^{ar}e^{-ar w_{\mu+1}}(-1)^{\mu}} = \frac{-P_2}{P_2+(-1)^{\mu}P_1 e^{ar}e^{ar w_{\mu}}}$$

$$= \frac{-P_2}{P_2+(-1)^{\mu}P_1 e^{2ar}},$$

und somit ist dieses Verhältnis im ganzen Gebiete der beiden Sektoren $S_{\mu+1}$, $S_{3\mu}$ mit Einschluß der begrenzenden imaginären Achse außerhalb der Sicherheitskreise beschränkt. Ähnliches gilt von den Gebieten S_{μ}, $S_{3\mu+1}$, in denen $w^{(1)}=1$ gleich $w_{\mu+1}$ ist. Hier fällt die vertikale Schlangenlinie in die dem $w_{\mu+1}$ entsprechende Kolonne und wird:

$$D_1 \sim \frac{1}{e^{ar}} \prod_{\mu+1}^{n} e^{ar w_i}\{(-1)^{\mu}P_2' + \varepsilon\}; \qquad D_2 \sim \frac{1}{e^{ar}} \prod_{\mu+1}^{n} e^{ar w_i}\{P_1' e^{ar w_{\mu}} + \varepsilon\};$$

$$\Phi \sim \frac{P_2'}{P_1'} e^{-ar w_{\mu}}(-1)^{\mu} = (-1)^{\mu}\frac{P_2'}{P_1'}e^{ar}; \quad \frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)} \sim \frac{-P_1'}{P_1'+(-1)^{\mu}P_2' e^{2ar}},$$

also bleibt auch dieses Verhältnis mit Ausschluß der Sicherheitskreise in den betrachteten Gebieten einschließlich der begrenzenden r''-Achse beschränkt.

Gehen wir nun zurück auf unsere Gleichung (16), so sehen wir, daß bei hinreichend großem Absolutwert des Realteiles von r, d. h. nach früherer Bezeichnung, in den Gebieten I und III der r-Ebene, eine Angabe über $\frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)}$ möglich ist. Es ist nämlich in der negativen Halbebene der Grenzwert von $\frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)}$ nach (16) gleich -1, da hier e^{ar} mit $r_1' \to \infty$ gegen Null geht, und, wie oben festgestellt, auf der Integrationslinie Φ endlich bleibt; ebenso ist in der positiven Halbebene auf K_n der Grenzwert von $\frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)}$ gleich Null, da e^{ar} mit $|r_1| \to \infty$ gegen ∞ strebt und Φ von Null verschieden ist; mithin ist daselbst der Grenzwert von $\frac{R_1+\mathfrak{F}(r)}{\mathfrak{F}(r)}$ gleich 1. Im Gebiete II der Integrationslinie, das als durch die vier Sektoren S_{μ}, $S_{\mu+1}$, $S_{3\mu}$, $S_{3\mu+1}$ auf dieser ausgeschnitten angenommen werden kann, bleiben $\frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)}$, mithin auch: $\frac{R_1+\mathfrak{F}(r)}{\mathfrak{F}(r)}$ unter Ausschluß der Sicherheitskreise, wie eben nachgewiesen, beschränkt.

Weiterhin untersuchen wir den Ausdruck:

$$\lim_{r'\to+\infty} r\,\frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)}\int_0^x e^{r(x-\nu)}f(\nu)\,d\nu \tag{20}$$

unter der Annahme, daß $f(\nu)$ eine beschränkte, stückweise stetige Funktion mit im Intervall $0\,..\,a$ beschränkter integrierbarer Ableitung $f'(\nu)$ sei. Dann können wir die Zerlegung § 1 (2) in Anwendung bringen. Für $r'\to+\infty$ konvergieren darin nach obigem $\frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)}$, also auch $\frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)}f(x)$ und

$\frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)}\frac{\bar{g}_1}{r}$ gegen Null. Ferner ist auf dem Integrationskreise K_∞ bei Anwendung von (16):

$$\frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)}e^{rx} \sim \frac{-1}{e^{-rx}+\Phi e^{r(a-x)}},$$

und dieses Verhältnis konvergiert, da $a-x>0$ ist, mit $r'\to\pm\infty$ gegen Null. Somit geht der ganze Ausdruck (20) bzw. seine Entwicklung nach § 1 (2) gegen Null. Der Grenzübergang $r'\to\infty$ ist, nebenbei bemerkt, gänzlich unbeeinflußt von den Werten, die hierbei r'' annimmt.

Ebenso behandeln wir den Ausdruck:

$$\lim_{r'\to-\infty} r\frac{R_1+\mathfrak{F}(r)}{\mathfrak{F}(r)}\int_x^a e^{r(x-\nu)}f(\nu)\,d\nu, \tag{21}$$

und verwenden die Zerlegung § 1 (4). Es ist nun:

$$\lim_{r'\to-\infty}\frac{R_1+\mathfrak{F}(r)}{\mathfrak{F}(r)}=\lim_{r'=-\infty}\frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)}+1=-1+1=0;$$

also:

$$\lim_{r'=-\infty}\frac{R_1+\mathfrak{F}(r)}{\mathfrak{F}(r)}f(x)=\lim\frac{R_1+\mathfrak{F}(r)}{\mathfrak{F}(r)}\frac{\bar{g}_2}{r}=0.$$

Ferner ist nach (16):

$$\frac{R_1+\mathfrak{F}(r)}{\mathfrak{F}(r)}=\frac{e^{ar}\Phi}{1+e^{ar}\Phi};\qquad \frac{R_1+\mathfrak{F}(r)}{\mathfrak{F}(r)}e^{r(x-a)}=\frac{\Phi e^{rx}}{1+\Phi e^{ar}}.$$

Da nun für $r'\to-\infty$ der Nenner gegen 1, und, weil $x>0$, der Zähler gegen Null geht, verschwinden auch diese Terme und damit der ganze Ausdruck (21). Es wird somit der Satz 3 des § 1 anwendbar, wenn wir in ihm $\chi(r)=R_1$; $\omega(r)=1$; $\psi(r)=R_1+\mathfrak{F}(r)$; $x_0=0$ setzen. Wir erhalten aus ihm die Relation:

$$\oint_{K_\infty}\frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)}\int_0^{r_1}e^{r(x-\nu)}f(\nu)\,d\nu\,dr=2\pi i f(x) \tag{22}$$

und dies ist die erste der behaupteten Gleichungen § 5 (21).

§ 8.

Der zweite Konvergenzbeweis.

Es ist jetzt noch der Nachweis zu erbringen, daß durch den Ansatz § 5 (23) zur Bestimmung der R_i auch die andern Gleichungen § 5 (21) befriedigt werden. Wir erledigen den Beweis für die zweite der behaupteten Gleichungen, da er bei den andern Relationen ganz analog verläuft.

Aus dem System § 5 (23) folgt für R_2 mit Beachtung von § 6 (2) die asymptotische Darstellung:

$$\simeq (-1)^{\left| \begin{array}{ccccccc} & f_0(rw^{(1)}) & & f_0(rw^{(2)}) & & f_0(rw^{(3)}) & \dots & f_0(rw^{(n)}) \\ & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ & f_{\mu-1}(rw^{(1)}) & & f_{\mu-1}(rw^{(2)}) & & f_{\mu-1}(rw^{(3)}) & \dots & f_{\mu-1}(rw^{(n)}) \\ e^{arw^{(1)}} & f_\mu(rw^{(1)}) & 0 & & e^{arw^{(3)}} & f_\mu(rw^{(3)}) & \dots e^{arw^{(n)}} & f_\mu(rw^{(n)}) \\ & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ e^{arw^{(1)}} & f_{n-1}(rw^{(1)}) & 0 & & e^{arw^{(3)}} & f_{n-1}(rw^{(3)}) & \dots e^{arw^{(n)}} & f_{n-1}(rw^{(n)}) \end{array} \right|},$$

oder, wenn wir die Randbedingungen, wie oben, als normiert voraussetzen, und die Entwicklungen § 6 (6) benützen:

$$\simeq (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i r^{k_i}} \left| \begin{array}{ccccccc} & [w^{(1)k_0}] & & [w^{(2)k_0}] & & [w^{(3)k_0}] & \dots & [w^{(n)k_0}] \\ & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ & [w^{(1)k_{\mu-1}}] & & [w^{(2)k_{\mu-1}}] & & [w^{(3)k_{\mu-1}}] & \dots & [w^{(n)k_{\mu-1}}] \\ e^{arw^{(1)}} & [w^{(1)k_\mu}] & 0 & & e^{arw^{(3)}} & [w^{(3)k_\mu}] & \dots e^{arw^{(n)}} & [w^{(n)k_\mu}] \\ & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ e^{arw^{(1)}} & [w^{(1)k_{n-1}}] & 0 & & e^{arw^{(3)}} & [w^{(3)k_{n-1}}] & \dots e^{arw^{(n)}} & [w^{(n)k_{n-1}}] \end{array} \right|.$$

Wir entwickeln $\mathfrak{F}(r)$ (vgl. (15)) und R_2 nach der zweiten Spalte und bezeichnen die Unterdeterminanten ihrer Elemente, genommen mit dem Vorzeichen, das ihnen bei dieser Entwicklung zukommt, mit $\bar{Q}_0 \dots \bar{Q}_{n-1}$. Dann ist, da $w^{(1)} = 1$ ist:

$$\mathfrak{F}(r) \simeq \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i r^{k_i}\left[\{w^{(2)k_0}[\bar{Q}_0] + w^{(2)k_1}[\bar{Q}_1] + \dots + w^{(2)k_{\mu-1}}[\bar{Q}_{\mu-1}]\} + e^{arw^{(2)}}\{w^{(2)k_\mu}[\bar{Q}_\mu] + \dots + w^{(2)k_{n-1}}[\bar{Q}_{n-1}]\}\right],$$

$$R_2 \simeq \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i r^{k_i}(-1)\{[\bar{Q}_0] + [\bar{Q}_1] + \dots + [\bar{Q}_{\mu-1}]\},$$

also:

$$\frac{R_2}{\mathfrak{F}(r)} \simeq \frac{-\Delta_0}{\bar{\Delta}_1 + \bar{\Delta}_2 e^{arw^{(2)}}}, \tag{23}$$

wobei gesetzt ist:

$$\Delta_0 = [\bar{Q}_0] + [\bar{Q}_1] + \dots + [\bar{Q}_{\mu-1}]$$

$$= \left| \begin{array}{ccccccc} & [w^{(1)k_0}] & & [1] & & [w^{(3)k_0}] & \dots & [w^{(n)k_0}] \\ & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ & [w^{(1)k_{\mu-1}}] & & [1] & & [w^{(3)k_{\mu-1}}] & \dots & [w^{(n)k_{\mu-1}}] \\ e^{arw^{(1)}} & [w^{(1)k_\mu}] & 0 & & e^{arw^{(3)}} & [w^{(3)k_\mu}] & \dots e^{arw^{(n)}} & [w^{(n)k_\mu}] \\ & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ e^{arw^{(1)}} & [w^{(1)k_{n-1}}] & 0 & & e^{arw^{(3)}} & [w^{(3)k_{n-1}}] & \dots e^{arw^{(n)}} & [w^{(n)k_{n-1}}] \end{array} \right|,$$

$$\bar{A}_1 = w^{(2)k_0}[\bar{Q}_0] + \ldots + w^{(2)k_{\mu-1}}[\bar{Q}_{\mu-1}]$$

$$(24) \quad = \begin{vmatrix} [w^{(1)k_0}] & [w^{(2)k_0}] & [w^{(3)k_0}] & \ldots & [w^{(n)k_0}] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [w^{(1)k_{\mu-1}}] & [w^{(2)k_{\mu-1}}] & [w^{(3)k_{\mu-1}}] & \ldots & [w^{(n)k_{\mu-1}}] \\ e^{arw^{(1)}}[w^{(1)k_\mu}] & 0 & e^{arw^{(3)}}[w^{(3)k_\mu}] & \ldots & e^{arw^{(n)}}[w^{(n)k_\mu}] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{arw^{(1)}}[w^{(1)k_{n-1}}] & 0 & e^{arw^{(3)}}[w^{(3)k_{n-1}}] & \ldots & e^{arw^{(n)}}[w^{(n)k_{n-1}}] \end{vmatrix},$$

$$\bar{A}_2 = w^{(2)k_\mu}[\bar{Q}_\mu] + \ldots + w^{(2)k_{n-1}}[\bar{Q}_{n-1}]$$

$$= \begin{vmatrix} [w^{(1)k_0}] & 0 & [w^{(3)k_0}] & \ldots & [w^{(n)k_0}] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [w^{(1)k_{\mu-1}}] & 0 & [w^{(3)k_{\mu-1}}] & \ldots & [w^{(n)k_{\mu-1}}] \\ e^{arw^{(1)}}[w^{(1)k_\mu}] & [w^{(2)k_\mu}] & e^{arw^{(3)}}[w^{(3)k_\mu}] & \ldots & e^{arw^{(n)}}[w^{(n)k_\mu}] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{arw^{(1)}}[w^{(1)k_{n-1}}] & [w^{(2)k_{n-1}}] & e^{arw^{(3)}}[w^{(3)k_{n-1}}] & \ldots & e^{arw^{(n)}}[w^{(n)k_{n-1}}] \end{vmatrix}.$$

Wir stellen uns nun die Aufgabe, das Verhältnis (23) auf dem Integrationskreise K_a der r-Ebene zu untersuchen. Betreffs der $w^{(1)}, w^{(2)}$ können folgende vier Möglichkeiten obwalten: Auf dem Integrationskreise kann sein:

1. $\Re(rw^{(1)}) > 0$ und $\Re(rw^{(2)}) > 0$;
2. $\Re(rw^{(1)}) > 0$ und $\Re(rw^{(2)}) < 0$;
3. $\Re(rw^{(1)}) < 0$ und $\Re(rw^{(2)}) > 0$;
4. $\Re(rw^{(1)}) < 0$ und $\Re(rw^{(2)}) < 0$.

Durch diese einzigen vier Möglichkeiten wird der Integrationskreis in vier Gebiete geteilt, die wir der Reihe nach betrachten müssen. Die Scheidung der Bereiche, in denen $\Re(rw^{(1)}) > 0$ bzw. < 0 ist, wird, wie oben, durch die imaginäre r''-Achse herbeigeführt, die Trennung der Teile aber, in denen $\Re(rw^{(2)}) > 0$ bzw. < 0 ist, durch den Strahl, der durch Spiegelung des der Einheitswurzel $w^{(2)}$ entsprechenden Strahles an dem Strahle $\arg = 45^0$ entsteht. Die entstehende Einteilung skizziert die Fig. 3. Die vier einzelnen Fälle müssen gesondert behandelt werden.

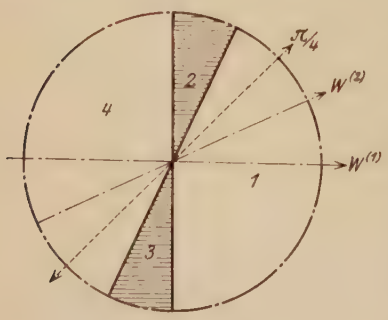

Fig. 3.

1. Fall. $\Re(rw^{(1)}) > 0$; $\Re(rw^{(2)}) > 0$. Es gehören also in den S-Gebieten, in denen der zugehörige Teil der Integrationslinie K_σ liegt, $w^{(1)}$ und $w^{(2)}$ der Reihe der $w_{\mu+1}, \ldots, w_n$ an, da wir ja die unteren Indizes so definiert hatten, daß $\Re(rw_{\mu+1}), \ldots, \Re(rw_n)$ positiv sein sollten. Wir ordnen jetzt in allen betroffenen S-Sektoren die Determinanten $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ nach den unteren Indizes, wodurch vor jede derselben ein bestimmtes, für alle drei gleiches Vorzeichen tritt, das wir gleich weglassen wollen, da es uns bei der Bildung von $\frac{R_2}{\mathfrak{F}(r)}$ nur auf die Verhältnisse $\frac{\Delta_0}{\Delta_1}; \frac{\Delta_0}{\Delta_2}$ ankommt. Die dem $w^{(2)}$ entsprechende Spalte wird dabei wegen der durch sie erzeugten Unsymmetrie vorweggenommen und im übrigen die entstehende Lücke durch eine Wellenlinie angedeutet. Es ist dann:

$$(25\,a) \qquad \Delta_0 \simeq \frac{\prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}}{e^{arw^{(2)}}}$$

$$\begin{array}{|cccccccccc|}
[w_1^{k_0}] & \ldots & [w_\mu^{k_0}] & [w_{\mu+1}^{k_0}]\, e^{-arw_{\mu+1}} & \ldots & [1]\, e^{-ar} & \ldots & [w_n^{k_0}] & e^{-arw_n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
[w_1^{k_\mu-1}] & \ldots & [w_\mu^{k_\mu-1}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu-1}]\, e^{-arw_{\mu+1}} & \ldots & [1]\, e^{-ar} & \ldots & [w_n^{k_\mu-1}]\, e^{-arw_n} \\
e^{arw_1}[w_1^{k_\mu}] & \ldots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_\mu}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu}] & & \ldots [1] & \ldots & [w_n^{k_\mu}] & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
e^{arw_1}[w_1^{k_n-1}] & \ldots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_n-1}] & [w_{\mu+1}^{k_n-1}] & & \ldots [1] & \ldots & [w_n^{k_n-1}] &
\end{array}$$

$$\simeq \frac{\prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}}{e^{arw^{(2)}}} \{T_1\, e^{arw_\mu} + \varepsilon\}.$$

Der Nenner $e^{arw^{(2)}}$ kommt daher, daß im Zähler dieser Faktor einmal zuviel auftritt, deswegen, weil doch in Δ_0 die dem $w^{(2)}$ entsprechende Kolonne durch die Wellenlinie kassiert ist; ε verwenden wir wieder als generelle Bezeichnung für eine mit $|r| \to \infty$ gegen Null konvergierende Größe; schließlich ist T_1 eine belanglose, jedenfalls endliche Determinante; alle weiteren Entwicklungsglieder der Determinante enthalten Exponentialfaktoren mit negativ reellen Exponenten, die also für $|r| \to \infty$ verschwinden, und dürfen daher in einem Ausdruck ε zusammengefaßt werden. Weiterhin wird:

$$(25\,\mathrm{b}) \qquad \Delta_1 \simeq \frac{\prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}}{e^{arw^{(2)}}}$$

$$\begin{vmatrix} [w^{(2)k_0}] & [w_1^{k_0}] & \dots & [w_\mu^{k_0}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_0}] & \dots [1]e^{-ar} & [w_n^{k_0}] & e \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [w^{(2)k_\mu-1}] & [w_1^{k_\mu-1}] & \dots & [w_\mu^{k_\mu-1}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_\mu-1}] & \dots [1]e^{-ar} & [w_n^{k_\mu-1}] & e \\ 0 & e^{arw_1}[w_1^{k_\mu}] & \dots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_\mu}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu}] & \dots [1] & [w_n^{k_\mu}] & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & e^{arw_1}[w_1^{k_n-1}] & \dots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_n-1}] & [w_{\mu+1}^{k_n-1}] & \dots [1] & [w_n^{k_n-1}] & \end{vmatrix}$$

$$\simeq \frac{\prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}}{e^{arw^{(2)}}} \{T_2 e^{arw_\mu} + \varepsilon\},$$

wo T_2 eine zu T_1 analoge endliche Determinante ist. Schließlich ist:

$$(25\,\mathrm{c}) \qquad \Delta_2 \simeq \frac{\prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}}{e^{arw^{(2)}}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & [w_1^{k_0}] & \dots & [w_\mu^{k_0}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_0}] & \dots [1]e^{-ar} & e^{-arw_n}[w \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & [w_1^{k_\mu-1}] & \dots & [w_\mu^{k_\mu-1}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_\mu-1}] & \dots [1]e^{-ar} & e^{-arw_n}[w \\ [w^{(2)k_\mu}] & e^{arw_1}[w_1^{k_\mu}] & \dots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_\mu}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu}] & \dots [1] & [w \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [w^{(2)k_n-1}] & e^{arw_1}[w_1^{k_n-1}] & \dots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_n-1}] & [w_{\mu+1}^{k_n-1}] & \dots [1] & [w \end{vmatrix}$$

$$\simeq \frac{\prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}}{e^{arw^{(2)}}} \{T_3 - T_4\, e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})} + \varepsilon\}(-1)^\mu;$$

wobei:

$$T_3 = \begin{vmatrix} [w_1^{k_0}] & \dots & [w_\mu^{k_0}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [w_1^{k_\mu-1}] & \dots & [w_\mu^{k_\mu-1}] \end{vmatrix} \begin{vmatrix} [w^{(2)k_\mu}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu}] & \dots [w_n^{k_\mu}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [w^{(2)k_n-1}] & [w_{\mu+1}^{k_n-1}] & \dots [w_n^{k_n-1}] \end{vmatrix},$$

$$T_4 = \begin{vmatrix} [w_1^{k_0}] & \dots & [w_{\mu-1}^{k_0}] & [w_{\mu+1}^{k_0}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [w_1^{k_\mu-1}] & \dots & [w_{\mu-1}^{k_\mu-1}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu-1}] \end{vmatrix} \begin{vmatrix} [w^{(2)k_\mu}] & [w_\mu^{k_\mu}] & [w_{\mu+2}^{k_\mu}] & \dots [w \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [w^{(2)k_n-1}] & [w_\mu^{k_n-1}] & [w_{\mu+2}^{k_n-1}] & \dots [w \end{vmatrix}$$

Somit ist in diesem Falle nach (23):

$$\frac{R_2}{\mathfrak{F}(r)} \simeq \frac{-T_1 e^{arw_\mu}}{T_2 e^{arw_\mu} + (-1)^\mu e^{arw^{(2)}} \{T_3 - T_4 e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})}\}}$$

$$= \frac{T_1}{T_2 + (-1)^\mu e^{arw^{(2)}} \{T_3 e^{-arw_\mu} - T_4 e^{-arw_{\mu+1}}\}}, \tag{25d}$$

$$\frac{R_2 e^{rw^{(2)}x}}{\mathfrak{F}(r)} \simeq \frac{-T_1}{T_2 e^{-rw^{(2)}x} + e^{(a-x)rw^{(2)}} (-1)^\mu \{T_3 e^{-arw_\mu} - T_4 e^{-arw_{\mu+1}}\}}.$$

Da nach der für diesen Fall getroffenen Voraussetzung $\Re(rw^{(2)}) > 0$ ist, geht in beiden Ausdrücken der Nenner mit wachsendem $|r|$ gegen unendlich große Werte, beide Brüche also asymptotisch gegen Null. Auszuschließen sind von der Betrachtung diejenigen Stellen, in denen der Faktor von $e^{arw^{(2)}}$ bzw. $e^{(a-x)rw^{(2)}}$ verschwindet, d. h. in denen $e^{ar(w_{\mu+1}-w_\mu)} = \frac{T_4}{T_3}$ ist. Da aber das Verhältnis $\frac{T_4}{T_3}$, wie ein Vergleich mit § 6 (8, 9) lehrt, gleich dem der Größen $[B]$ und $[A]$ ist, so sind die in Frage kommenden Stellen identisch mit den schon früher durch Sicherheitskreise ausgeschlossenen Punkten.

2. Fall. $\Re(rw^{(1)}) > 0$; $\Re(rw^{(2)}) < 0$, d. h. in den S-Gebieten der r-Ebene, in denen dieser Fall statthat, gehört $w^{(1)}$ zu den $w_{\mu+1} \dots w_n$, $w^{(2)}$ aber zu den $w_1 \dots w_\mu$. Es ist somit:

$$\bar{A}_0 \simeq \prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i} \tag{26a}$$

$$\begin{vmatrix}
[w_1^{k_0}] & \dots & [w_\mu^{k_0}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_0}] & \dots & [1] & e^{-ar} & \dots & e^{-arw_n}[w_n^{k_0}] \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
[w_1^{k_\mu - 1}] & \dots & [w_\mu^{k_\mu - 1}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_\mu - 1}] & \dots & [1] & e^{-ar} & \dots & e^{-arw_n}[w_n^{k_\mu - 1}] \\
e^{rw_1}[w_1^{k_\mu}] & \dots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_\mu}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu}] & \dots & [1] & \dots & & [w_n^{k_\mu}] \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
e^{rw_1}[w_1^{k_n - 1}] & \dots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_n - 1}] & [w_{\mu+1}^{k_n - 1}] & \dots & [1] & \dots & & [w_n^{k_n - 1}]
\end{vmatrix}$$

$$\simeq \prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i} \{T_1' - T_2' e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})} + \varepsilon\};$$

(26b) $$\Delta_1 \simeq \prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}$$

$$\begin{vmatrix} [w^{(1)k_0}] & [w_1^{k_0}] & \dots & [w_\mu^{k_0}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_0}] & \dots & [1]\, e^{-ar} & \dots & e^{-arw_n}[\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [w^{(2)k_\mu-1}] & [w_1^{k_\mu-1}] & \dots & [w_\mu^{k_\mu-1}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_\mu-1}] & \dots & [1]\, e^{-ar} & \dots & e^{-arw_n}[\\ 0 & e^{arw_1}[w_1^{k_\mu}] & \dots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_\mu}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu}] & \dots & [1] & \dots & [\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & e^{arw_1}[w_1^{k_n-1}] & \dots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_n-1}] & [w_{\mu+1}^{k_n-1}] & \dots & [1] & \dots & [\end{vmatrix}$$

$$\simeq \prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}\{T_3' - T_4' e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})} + \varepsilon\},$$

wobei

$$T_3' = \begin{vmatrix} [w^{(2)k_0}] & [w_1^{k_0}] & \dots & [w_\mu^{k_0}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu}] & \dots & [w_n^{k_\mu}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [w^{(2)k_\mu-1}] & [w_1^{k_\mu-1}] & \dots & [w_\mu^{k_\mu-1}] & [w_{\mu+1}^{k_n-1}] & \dots & [w_n^{k_n-1}] \end{vmatrix},$$

$$T_4' = \begin{vmatrix} [w^{(2)k_0}] & [w_1^{k_0}] & \dots & [w_{\mu-1}^{k_0}] & [w_{\mu+1}^{k_0}] & [w_\mu^{k_\mu}] & [w_{\mu+2}^{k_\mu}] & \dots & [w_n^{k_\mu}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [w^{(2)k_\mu-1}] & [w_1^{k_\mu-1}] & \dots & [w_{\mu-1}^{k_\mu-1}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu-1}] & [w_\mu^{k_n-1}] & [w_{\mu+2}^{k_n-1}] & \dots & [w_n^{k_n-1}] \end{vmatrix}$$

(26c) $$\Delta_2 \simeq \prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & [w_1^{k_0}] & \dots & [w_\mu^{k_0}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_0}] & \dots & [1]\, e^{-ar} & \dots & e^{-arw_n}[\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & [w_1^{k_\mu-1}] & \dots & [w_\mu^{k_\mu-1}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_\mu-1}] & \dots & [1]\, e^{-ar} & \dots & e^{-arw_n}[\\ [w^{(2)k_\mu}] & e^{arw_1}[w_1^{k_\mu}] & \dots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_\mu}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu}] & \dots & [1] & \dots & [\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [w^{(2)k_n-1}] & e^{arw_1}[w_1^{k_n-1}] & \dots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_n-1}] & [w_{\mu+1}^{k_n-1}] & \dots & [1] & \dots & [\end{vmatrix}$$

$$\sim \prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}\{(-1)^\mu T_5' e^{-arw_{\mu+1}} + \varepsilon\}.$$

Dabei bedeuten $T_1', \dots, T_5'$ gewisse endliche Determinanten. Es wird also:

(26d)
$$\frac{R_2}{\mathfrak{F}(r)} \sim \frac{-T_1' + T_2' e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})}}{T_3' - T_4' e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})} - (-1)^\mu T_5' e^{-arw_{\mu+1}} e^{arw^{(2)}}},$$

$$\frac{R_2 e^{rw^{(2)}x}}{\mathfrak{F}(r)} \sim \frac{-T_1' e^{rw^{(2)}x} + T_2' e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})} e^{rw^{(2)}x}}{T_3' - T_4' e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})} - (-1)^\mu T_5' e^{-arw_{\mu+1}} e^{arw^{(2)}}}.$$

Gemäß der Voraussetzung dieses Falles, daß $\Re(rw^{(2)}) < 0$ sei, geht im letzten Ausdruck der Zähler mit wachsendem $|r|$ gegen Null; gegen dieselbe Grenze konvergiert auch der letzte Nennersummand, und sind daher die Stellen auszuschließen, in denen auch die Summe der beiden ersten Nennersummanden verschwindet, d. h. wo $e^{ar(w_{\mu+1}-w_\mu)} = \frac{T_4'}{T_3'}$ ist; da aber aus der Definition von T_3', T_4' einerseits, und § 6 (8, 9) anderseits, folgt, daß $\frac{T_4'}{T_3'} = \frac{[B]}{[A]}$ ist, sind die betreffenden Stellen identisch mit den schon ausgeschiedenen Punkten der r-Ebene.

3. Fall. $\Re(rw^{(1)}) < 0$; $\Re(rw^{(2)}) > 0$. Es zählt also in den in Frage kommenden S-Gebieten $w^{(1)}$ zu den $w_1, \ldots, w_\mu$; $w^{(2)}$ zu den $w_{\mu+1}, \ldots, w_n$. Bei der Aufstellung der Determinante $\bar{\Delta}_0$ subtrahieren wir gleich die der Einheitswurzel $w^{(2)}$ entsprechende Spalte von der zu $w^{(1)} = 1$ gehörigen, nehmen diese beiden, abweichend von den andern gebauten Spalten vorweg und markieren die dadurch entstehenden Lücken des regelmäßigen, nach den unteren Indizes der w_i geordneten Determinantenschemas durch Wellenlinien. Da $w^{(1)}$ zu den $w_1, \ldots, w_\mu$ zählt, gehört also die erste Wellenlinie zu der $w^{(1)}$ entsprechenden, die zweite zu der $w^{(2)}$ entsprechenden Kolonne. Wir finden so:

$$(27\mathrm{a}) \qquad \bar{\Delta}_0 \simeq \frac{\prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}}{e^{arw^{(2)}}}$$

$$\begin{array}{llllllll}
[1] & [0] & [w_1^{k_0}] & \sim\sim & [w_\mu^{k_0}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_0}] & \sim\sim & e^{-arw_n}[w_n^{k_0}] \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
[1] & [0] & [w_1^{k_\mu-1}] & \sim\sim & [w_\mu^{k_\mu-1}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_\mu-1}] & \sim\sim & e^{-arw_n}[w_n^{k_\mu-1}] \\
0 & [e^{ar}] & e^{arw_1}[w_1^{k_\mu}] & \cdots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_\mu}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu}] & \cdots & [w_n^{k_\mu}] \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & [e^{ar}] & e^{arw_1}[w_1^{k_n-1}] & \sim\sim & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_n-1}] & [w_{\mu+1}^{k_n-1}] & \sim\sim & [w_n^{k_n-1}]
\end{array}$$

$$\simeq \frac{\prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}}{e^{arw^{(2)}}} e^{ar}\{T_2'' - T_5'' e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})} + \varepsilon\}(-1)^{\mu+1};$$

$$(27\,b)\qquad \bar{A}_1 \sim \frac{\prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}}{e^{arw^{(2)}}}$$

$$\begin{vmatrix} [w^{(2)k_0}] & [1] & [w_1^{k_0}] & \dots & [w_\mu^{k_0}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_0}] & \dots & e^{-arw_n}[w_n^{k_0}] \\ \dots & & & & & & & \\ [w^{(2)k_{\mu-1}}] & [1] & [w_1^{k_\mu-1}] & \dots & [w_\mu^{k_\mu-1}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_\mu-1}] & \dots & e^{-arw_n}[w_n^{k_\mu-1}] \\ 0 & [e^{ar}] & e^{arw_1}[w_1^{k_\mu}] & \dots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_\mu}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu}] & \dots & [w_n^{k_\mu}] \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & [e^{ar}] & e^{arw_1}[w_1^{k_n-1}] & \dots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_n-1}] & [w_{\mu+1}^{k_n-1}] & \dots & [w_n^{k_n-1}] \end{vmatrix}$$

$$\sim \frac{\prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}}{e^{arw^{(2)}}} \{T_1'' e^{arw_\mu} + \varepsilon\};$$

$$(27\,c)\qquad \bar{A}_2 \sim \frac{\prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}}{e^{arw^{(2)}}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & [1] & [w_1^{k_0}] & \dots & [w_\mu^{k_0}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_0}] & \dots & e^{-arw_n}[w_n^{k_0}] \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & [1] & [w_1^{k_\mu-1}] & \dots & [w_\mu^{k_\mu-1}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_\mu-1}] & \dots & e^{-arw_n}[w_n^{k_\mu-1}] \\ [w^{(2)k_\mu}] & [e^{ar}] & e^{arw_1}[w_1^{k_\mu}] & \dots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_\mu}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu}] & \dots & [w_n^{k_\mu}] \\ \dots & & & & & & & \\ [w^{(2)k_{n-1}}] & [e^{ar}] & e^{arw_1}[w_1^{k_n-1}] & \dots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_n-1}] & [w_{\mu+1}^{k_n-1}] & \dots & [w_n^{k_n-1}] \end{vmatrix}$$

$$\sim \frac{\prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}}{e^{arw^{(2)}}} \{T_3'' - T_4'' e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})} + \varepsilon\},$$

wobei

$$T_3'' = \begin{vmatrix} [1] & [w_1^{k_0}] & \dots & [w_\mu^{k_0}] \\ \dots & & & \\ [1] & [w_1^{k_\mu-1}] & \dots & [w_\mu^{k_\mu-1}] \end{vmatrix} \begin{vmatrix} [w^{(2)k_\mu}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu}] & \dots & [w_n^{k_\mu}] \\ \dots & & & \\ [w^{(2)k_{n-1}}] & [w_{\mu+1}^{k_n-1}] & \dots & [w_n^{k_n-1}] \end{vmatrix},$$

$$T_4'' = \begin{vmatrix} [1] & [w_1^{k_0}] & \dots & [w_{\mu-1}^{k_0}] & [w_{\mu+1}^{k_0}] \\ \dots & & & & \\ [1] & [w_1^{k_\mu-1}] & \dots & [w_{\mu-1}^{k_\mu-1}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu-1}] \end{vmatrix} \begin{vmatrix} [w^{(2)k_\mu}] & [w_\mu^{k_\mu}] & [w_{\mu+2}^{k_\mu}] & \dots & [w_n^{k_\mu}] \\ \dots & & & & \\ [w^{(2)k_{n-1}}] & [w_\mu^{k_n-1}] & [w_{\mu+2}^{k_n-1}] & \dots & [w_n^{k_n-1}] \end{vmatrix}.$$

Im übrigen sind $T_1', \ldots, T_5'$ endliche Determinantenprodukte. Es wird also:

$$\frac{R_2}{\mathfrak{F}(r)} \simeq \frac{\{T_2'' - T_5'' e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})}\} e^{ar}}{(-1)^\mu T_1'' e^{ar w_\mu} + e^{ar w^{(2)}} \{T_3'' - T_4'' e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})}\}},$$

(28)
$$\frac{R_2 e^{r w^{(2)} x}}{\mathfrak{F}(r)} \simeq \frac{\{T_2'' - T_5'' e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})}\} e^{ar}}{(-1)^\mu T_1'' e^{ar w_\mu} e^{-r w^{(2)} x} + e^{r w^{(2)}(a-x)} \{T_3'' - T_4'' e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})}\}}.$$

$$\frac{R_2 e^{r w^{(2)} x} e^{-ar}}{\mathfrak{F}(r)} \sim \frac{T_2'' - T_5'' \cdot e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})}}{(-1)^\mu T_1'' e^{ar w_\mu} e^{-r w^{(2)} x} + e^{r w^{(2)}(a-x)} \{T_3'' - T_4'' e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})}\}}.$$

Alle drei Ausdrücke konvergieren bei der geltenden Voraussetzung, daß $\Re(r w^{(1)}) = \Re(r) < 0$, $\Re(r w^{(2)}) > 0$ sei, mit wachsendem $|r$ gegen Null; denn in den beiden ersten verschwindet in der Grenze der Zähler und im allgemeinen der erste Nennersummand, während der zweite Nennersummand im allgemeinen beliebig groß wird; beim dritten Ausdruck ist der Zähler endlich, der erste Nennerterm verschwindet in der Grenze, während der zweite im allgemeinen unendlich groß wird; auszuschließen sind wiederum die Stellen, in denen auch das zweite Glied des Nenners sich annulliert, d. h. wo $e^{ar(w_{\mu+1} - w_\mu)} = \frac{T_4''}{T_3''}$ ist; da $\frac{T_4''}{T_3''} = \frac{B}{[A]}$ ist, sind diese Stellen die schon früher als Nullstellen von $\mathfrak{F}(r)$ durch Sicherheitskreise ausgeschlossenen Punkte.

4. Fall. $\Re(r w^{(1)}) < 0$; $\Re(r w^{(2)}) < 0$. Es gehören in den betreffenden S-Gebieten $w^{(1)}$ und $w^{(2)}$ zu den $w_1, \ldots, w_n$. Durch den gleichen Prozeß wie oben finden wir die Determinanten:

(29a)
$$\Delta_0 \simeq \prod_{\mu=1}^{n} e^{ar w_i} e^{ar}$$

$$\begin{array}{llllllll}
[1] & [0] & [w_1^{k_0}] & \ldots & [w_\mu^{k_0}] & e^{-ar w_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_0}] & \ldots & e^{-ar w_n}[w_n^{k_0}] \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
[1] & [0] & [w_1^{k_\mu - 1}] & \ldots & [w_\mu^{k_\mu - 1}] & e^{-ar w_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_\mu - 1}] & \ldots & e^{-ar w_n}[w_n^{k_\mu - 1}] \\
0 & [1] & e^{ar w_1}[w_1^{k_\mu}] & \ldots & e^{ar w_\mu}[w_\mu^{k_\mu}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu}] & \ldots & [w_n^{k_\mu}] \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & [1] & e^{ar w_1}[w_1^{k_n - 1}] & \ldots & e^{ar w_\mu}[w_\mu^{k_n - 1}] & [w_{\mu+1}^{k_n - 1}] & \ldots & [w_n^{k_n - 1}]
\end{array};$$

$$\simeq \prod_{\mu=1}^{n} e^{ar w_i} e^{ar} \{T_2''' e^{-ar w_{\mu+1}} + \varepsilon\} (-1)^{\mu+1},$$

(29b) $$\bar{A}_1 \simeq \prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}$$

$$\begin{vmatrix} [w^{(2)k_0}] & [1] & [w_1^{k_0}] & \cdots & [w_\mu^{k_0}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_0}] & \cdots & e^{-arw_n}[w_n^{k_0}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [w^{(2)k_{\mu-1}}] & [1] & [w_1^{k_\mu-1}] & \cdots & [w_\mu^{k_\mu-1}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_\mu-1}] & \cdots & e^{-arw_n}[w_n^{k_\mu-1}] \\ 0 & [e^{ar}] & e^{arw_1}[w_1^{k_\mu}] & \cdots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_\mu}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu}] & \cdots & [w_n^{k_\mu}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & [e^{ar}] & e^{arw_1}[w_1^{k_n-1}] & \cdots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_n-1}] & [w_{\mu+1}^{k_n-1}] & \cdots & [w_n^{k_n-1}] \end{vmatrix}$$

$$\simeq \prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}\{T_3''' - T_4''' e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})} + \varepsilon\},$$

wobei:

$$T_3''' = \begin{vmatrix} [w^{(2)k_0}] & [1] & [w_1^{k_0}] & \cdots & [w_\mu^{k_0}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu}] & \cdots & [w_n^{k_\mu}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [w^{(2)k_{\mu-1}}] & [1] & [w_1^{k_\mu-1}] & \cdots & [w_\mu^{k_\mu-1}] & [w_{\mu+1}^{k_n-1}] & \cdots & [w_n^{k_n-1}] \end{vmatrix},$$

$$T_4''' = \begin{vmatrix} [w^{(2)k_0}] & [1] & [w_1^{k_0}] & \cdots & [w_{\mu-1}^{k_0}] & [w_{\mu+1}^{k_0}] & [w_\mu^{k_\mu}] & [w_{\mu+2}^{k_\mu}] & \cdots & [w_n^{k_\mu}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [w^{(2)k_{\mu-1}}] & [1] & [w_1^{k_\mu-1}] & \cdots & [w_{\mu-1}^{k_\mu-1}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu-1}] & [w_\mu^{k_n-1}] & [w_{\mu+2}^{k_n-1}] & \cdots & [w_n^{k_n-1}] \end{vmatrix}$$

(29c) $$\bar{A}_2 \simeq \prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & [1] & [w_1^{k_0}] & \cdots & [w_\mu^{k_0}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_0}] & \cdots & e^{-arw_n}[w_n^{k_0}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & [1] & [w_1^{k_\mu-1}] & \cdots & [w_\mu^{k_\mu-1}] & e^{-arw_{\mu+1}}[w_{\mu+1}^{k_\mu-1}] & \cdots & e^{-arw_n}[w_n^{k_\mu-1}] \\ [w^{(2)k_\mu}] & [e^{ar}] & e^{arw_1}[w_1^{k_\mu}] & \cdots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_\mu}] & [w_{\mu+1}^{k_\mu}] & \cdots & [w_n^{k_\mu}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [w^{(2)k_{n-1}}] & [e^{ar}] & e^{arw_1}[w_1^{k_n-1}] & \cdots & e^{arw_\mu}[w_\mu^{k_n-1}] & [w_{\mu+1}^{k_n-1}] & \cdots & [w_n^{k_n-1}] \end{vmatrix}$$

$$\simeq \prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}\{T_1''' e^{-arw_{\mu+1}} + \varepsilon\}(-1)^\mu.$$

Hierbei sind $T_1''', \ldots, T_4'''$ gewisse endliche Determinantenprodukte. Es wird also:

$$\frac{R_2}{\mathfrak{F}(r)} \simeq \frac{T_2''' e^{-arw_{\mu+1}} e^{ar}}{(-1)^\mu\{T_3''' - T_4''' e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})}\} + T_1''' e^{arw^{(2)}} e^{-arw_{\mu+1}}}$$

(30)
$$\frac{R_2 e^{rw^{(2)}x}}{\mathfrak{F}(r)} \simeq \frac{T_2''' e^{-arw_{\mu+1}} e^{ar} e^{rw^{(2)}x}}{(-1)^\mu\{T_3''' - T_4''' e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})}\} + T_1''' e^{arw^{(2)}} e^{-arw_{\mu+1}}}$$

$$\frac{R_2 e^{rw^{(2)}x} e^{-ar}}{\mathfrak{F}(r)} \simeq \frac{T_2''' e^{-arw_{\mu+1}} e^{rw^{(2)}x}}{(-1)^\mu\{T_3''' - T_4''' e^{ar(w_\mu - w_{\mu+1})}\} + T_1''' e^{arw^{(2)}} e^{-arw_{\mu+1}}}$$

In diesen Ausdrücken verschwindet wegen der getroffenen Voraussetzung: $\Re(r) < 0$; $\Re(r w^{(2)}) < 0$ der Zähler und der zweite Nennerbestandteil in der Grenze für unendlich großes $|r|$. Folglich verschwinden auch alle drei Terme asymptotisch, wenn wir die Stellen ausscheiden, in denen auch der erste Nennersummand sich annulliert, d. h. wo: $e^{a r (w_{\mu+1} - w_\mu)} = \frac{T_4'''}{T_3'''}$ ist. Da $\frac{T_4'''}{T_3'''} = \frac{[B]}{[A]}$, sind dies die bereits früher durch Sicherheitskreise ausgeschiedenen Punkte.

Nun können wir an die Betrachtung des zur Diskussion stehenden Ausdrucks:

$$\oint_{K_x} \frac{R_2 e^{r w^{(2)} x}}{\mathfrak{F}(r)} \int_0^a e^{-r\nu} f(\nu)\, d\nu$$

herangehen, der aus dem entsprechenden in den Gleichungen § 5 (21) hervorgeht, indem wir uns den Nullpunkt der Raumkoordinate nach x_0 verschoben denken. Wir haben nachgewiesen, daß $\frac{R_2}{\mathfrak{F}(r)}$ in r nur außerwesentliche Singularitäten besitzt, die mit den Nullstellen von $\mathfrak{F}(r)$ zusammenfallen. Weiter haben wir gezeigt, daß der vordere Faktor $\frac{R_2 e^{r w^{(2)} x}}{\mathfrak{F}(r)}$ in allen vier Fällen asymptotisch verschwindet. Auch an den Grenzstrahlen der entsprechenden Gebiete, wo also entweder $\Re(r w^{(1)}) = 0$ oder $\Re(r w^{(2)}) = 0$ ist, bleibt dieses asymptotische Verschwinden ungestört; denn nehmen wir etwa die imaginäre Achse, auf der $\Re(r w^{(1)}) = 0$ ist; auf der Kreiskontur K_n stößt diese Achse durch; wir grenzen um jeden ihrer Durchstoßpunkte ein endliches Gebiet 2δ ab, so daß je ein Stück δ in die Gebiete der Fälle 1 bis 4 zu liegen kommt, das wir dann bzw. mit $\delta_1 \ldots \delta_4$ bezeichnen. Dann ist in δ_1 und δ_2: $\Re(r) \gtrless 0$, was aber die an (25d) und (26d) geknüpfte Diskussion gar nicht beeinflußt. In den Gebieten δ_3 und δ_4 hingegen ist $\Re(r) \leqq 0$, also $w^{(1)} \quad w_n$. Nun war in den beiden zugehörigen Fällen die der Wurzel $w^{(1)}$ entsprechende Kolonne der Determinanten durch eine Wellenlinie kassiert, wir erhalten daher die den Gleichungen (28), (30) entsprechenden Relationen in δ_3 und δ_4, indem wir alle Terme, in denen w_n auftritt, streichen, so daß z. B. in δ_3:

$$\frac{R_2}{\mathfrak{F}(r)} \sim \frac{T_2'' e^{a r}}{T_3'' e^{a r w^{(2)}}} \quad \text{usw.}$$

Man sieht, daß das Verschwinden dieser Ausdrücke in δ_3 und δ_4 nicht im geringsten beeinträchtigt wird. Eine ähnliche Betrachtung gilt in der Um-

gebung des Strahles, auf dem $\Re(r w^{(2)}) = 0$ ist. Ferner findet man mittels partieller Integration:

$$r \frac{R_2 e^{r w^{(2)} x}}{\mathfrak{F}(r)} \int_0^a e^{-rv} f(v)\, dv = \frac{R_2 e^{r w^{(2)} x}}{\mathfrak{F}(r)} \{ f(0) - e^{-ar} f(a) + \int_0^a e^{-rv} f'(v)\, dv \},$$

oder nach Anwendung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung:

$$r \frac{R_2 e^{r w^{(2)} x}}{\mathfrak{F}(r)} \int_0^a e^{-rv} f(v)\, dv = \frac{R_2 e^{r w^{(2)} x}}{\mathfrak{F}(r)} \{ f(0) - f(a) e^{-ar} + \frac{\bar{g}}{r} (e^{-ar} - 1) \},$$

wobei $\bar{g}$ einen Mittelwert der als beschränkt und integrierbar vorausgesetzten Größe $f'(v)$ für das Intervall $0 \ldots a$ bedeutet. Da nun in den Fällen 3 und 4 durch (28), (30) die Beziehung nachgewiesen ist:

$$\lim_{r' = -\infty} \frac{R_2 e^{r w^{(2)} x}}{\mathfrak{F}(r)} e^{-ar} = 0$$

und in den Fällen 1 und 2:

$$\lim_{r' = +\infty} \frac{R_2 e^{r w^{(2)} x}}{\mathfrak{F}(r)} e^{-ar} = 0$$

ist, weil schon der erste Faktor gegen Null konvergiert, so folgt, daß auch

$$\lim_{r' = -\infty} \frac{r R_2 e^{r w^{(2)} x}}{\mathfrak{F}(r)} \int_0^a e^{-rv} f(v)\, dv = 0$$

ist. Somit sind die Voraussetzungen des Satzes 2 in § 2 erfüllt, wenn man dort $x = x_0 = 0$, $\chi(r) = R_2 e^{r w^{(2)} x}$ setzt. Wenden wir das Korollar dieses Satzes an und beachten, daß auf der ganzen Integrationskontur der Wert des Verhältnisses $\frac{\chi(r)}{\mathfrak{F}(r)}$ gegen Null strebt, so folgt schließlich die gewünschte Gleichung:

$$\oint_{K_\infty} \frac{R_2 e^{r w^{(2)} x}}{\mathfrak{F}(r)} \int_0^a e^{-rv} f(v)\, dv\, dr = 0. \tag{31}$$

In ganz der gleichen Weise beweist man die übrigen Gleichungen § 5 (21); es ist dazu in der vorangehenden Darstellung nur $w^{(2)}$ durch $w^{(3)}, \ldots, w^{(n)}$ und gleichzeitig R_2 durch $R_3, \ldots, R_n$ zu ersetzen. Damit ist also das gesuchte Entwicklungsproblem gelöst und der Ansatz § 5 (16) bzw. (22) für die Funktionen $q(r, s)$ bzw. die $\Re_i$ gerechtfertigt. Statt § 5 (22) kann man auch ansetzen:

$$\Re_0 = \Re_1 = \ldots = \Re_{\mu-1} = 0, \tag{32}$$

$$\Re_\mu = e^{ar} f_\mu(r), \quad \Re_{\mu+1} = e^{ar} f_{\mu+1}(r), \ \ldots, \ \Re_{n-1} = e^{ar} f_{n-1}(r).$$

Die damit aus § 4 (10) definierten R_i - wir bezeichnen sie als $R_1, \ldots, R_n$ — ergänzen sich dann nämlich mit den negativen Werten der bisherigen R_i zu $\mathfrak{F}(r)$, so daß $R_i = \mathfrak{F}(r) + R_i$ wird, und es gelten daher die Entwicklungen § 5 (21) auch für diese Größen, da die mit dem ersten Bestandteil $\mathfrak{F}(r)$ von R_i gebildeten Konturintegrale als solche über holomorphe Funktionen verschwinden. Die so erhaltenen Entwicklungen sind die sogenannten „konjugierten" Entwicklungen.

§ 9.

Zusammenfassung.

Wir wollen nun unsere bisherigen Resultate zusammenfassen. Dazu gehen wir aus von der in § 5 (13) definierten Größe v, die der Differentialgleichung § 5 (14) genügt, und setzen:

$$\frac{v}{\mathfrak{F}(r)} = V = \Phi(x, r). \tag{33}$$

Dann genügt auch V der Differentialgleichung:

$$F(D_x, s)\, V = V \cdot F(r, s) \tag{34}$$

und vermöge § 5 (23) den Randbedingungen:

$$\begin{aligned} &\text{für } x = x_0: \\ &f_0(D_x)\, V = -f_0(r),\ f_1(D_x)\, V = -f_1(r),\ \ldots,\ f_{\mu-1}(D_x)\, V = -f_{\mu-1}(r); \\ &\text{für } x = x_1: \\ &f_\mu(D_x)\, V = 0,\qquad f_{\mu+1}(D_x)\, V = 0,\qquad \ldots,\ f_{n-1}(D_x)\, V = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

oder, wenn wir den Ansatz (32) machen, den Bedingungen:

$$\begin{aligned} &\text{für } x = x_0: \\ &f_0(D_x)\, V = 0,\qquad f_1(D_x)\, V = 0,\qquad \ldots,\ f_{\mu-1}(D_x)\, V = 0; \\ &\text{für } x = x_1: \\ &f_\mu(D_x)\, V = e^{ar} f_\mu(r),\ f_{\mu+1}(D_x)\, V = e^{ar} f_{\mu+1}(r),\ \ldots,\ f_{n-1}(D_x)\, V = e^{ar} f_{n-1}(r). \end{aligned} \tag{36}$$

Somit können wir den folgenden Satz aussprechen:

Satz. *Sei $F(r, s)$ eine ganze rationale Funktion der Variablen r, s vom Grade $n = 2\mu$ bezüglich r und vom Grade m bezüglich s, in der die Variablen getrennt und die Koeffizienten konstant sind. Sei ferner $V = \Phi(x, r)$ eine Funktion von x und r, die durch die Gleichungen (34), (35) bzw. (34), (36) definiert ist; dann gilt für eine stückweise stetige, beschränkte, mit beschränkter, integrierbarer Ableitung versehene Funktion $f(x)$ zwischen den Grenzen x_0 und x_1 die Entwicklung:*

$$f(x) = \sum_r \operatorname{Res} \Phi(x, r) \int_{x_0}^{x_1} e^{-r(\nu - x_0)} f(\nu)\, d\nu.$$

Das Integral der Differentialgleichung:

$$F(D_x, D_t)z = 0,$$

das die normierten, linearen, homogenen, regulären Randbedingungen:

$$\text{für } x = x_0\colon \quad f_0(D_x)z = 0, \quad f_1(D_x)z = 0, \quad \ldots, \quad f_{\mu-1}(D_x)z = 0;$$
$$\text{für } x = x_1\colon \quad f_\mu(D_x)z = 0, \; f_{\mu+1}(D_x)z = 0, \quad \ldots, \quad f_{n-1}(D_x)z = 0,$$

und die Anfangsbedingungen:

$$\text{für } t = t_0\colon \quad z = \bar{f}_0(x), \; \frac{\partial z}{\partial t} = \bar{f}_1(x), \; \ldots, \; \frac{\partial^{m-1} z}{\partial t^{m-1}} = \bar{f}_{m-1}(x)$$

erfüllt, lautet:

$$z = \oint_{K_\alpha}\oint e^{s(t-t_0)} \Phi(x, r) \int_{x_0}^{x_1} e^{-r(\nu - x_0)} \frac{F(r,s) - F(r, \bar{f}(\nu))}{s - \bar{f}(\nu)} d\nu \frac{dr}{2\pi i} \frac{ds}{2\pi i},$$

wobei im innern Integranden in der Entwicklung nach Potenzen von $f(\nu)$ die Exponenten durch Indizes zu ersetzen sind und die Konturintegrale sich über die unendlich große Kreiskontur der r- bzw. s-Ebene erstrecken.

§ 10.

Der Fall des ungeraden n.

Wir stellen uns nun die Aufgabe der Verallgemeinerung unserer Resultate auf Differentialgleichungen ungerader Ordnung. Die Form der Ausgangsdifferentialgleichung § 4 (1), die Definitionsgleichung § 5 (13) für v und die Anfangsbedingungen § 4 (3) behalten wir bei. Dann befriedigt also v die Differentialgleichung:

$$(1) \quad \begin{cases} F(D_x, 0)v = v\,F(r, 0) \\ \text{oder} \\ A_n \dfrac{d^n v}{dx^n} + A_{n-1} \dfrac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} + \ldots + A_1 \dfrac{dv}{dx} + A_0 v - \sum_{i=0}^{n} A_i r^i v = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichung hat die n partikulären Integrale:

$$(2) \qquad y_1 = e^{r_1 x}, \; y_2 = e^{r_2 x}, \; \ldots, \; y_n = e^{r_n x},$$

worin $r_1, r_2, \ldots, r_n$ die Wurzeln ϱ der Gleichung § 4 (4):

$$(3) \qquad \sum_{i=0}^{n} A_i (r^i - \varrho^i) = 0$$

sind. Die asymptotischen Werte dieser Wurzeln sind, wie in § 6 gezeigt, die Größen $r w^{(i)}$, wo $w^{(i)}$ die n-ten Einheitswurzeln bedeuten. Da wir aber jetzt n als ungerade annehmen wollen, herrscht in letzteren nicht mehr die gleiche Symmetrie wie im Falle eines geraden n. Diese Ein-

heitswurzeln $w^{(i)}$ ordnen wir in der r-Ebene nach einem einheitlichen Prinzip, etwa den Argumenten, und charakterisieren die getroffene Anordnung durch die oberen Indizes, so daß $w^{(1)} = 1$ ist. Die wieder als linear homogen angenommenen Randbedingungen $f_i(D_x)\,v = 0$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ sollen sich auf die beiden Intervallendpunkte $x_0 = 0$ und $x_1 = a$ beziehen; sie können sich aber im vorliegenden Falle nicht mehr symmetrisch auf beide verteilen, es kommen vielmehr allgemein in jeder von ihnen die Größen $v(0),\ v'(0),\ \ldots,\ v^{(n-1)}(0);\ v(a),\ v'(a),\ \ldots,\ v^{(n-1)}(a)$ vor. Wir normieren nun diese Randbedingungen[16]), indem wir sie mittels linearer Kombination so koppeln, daß sich zunächst die Anzahl derjenigen Bedingungen, in denen $v^{(n-1)}(0)$ und $v^{(n-1)}(a)$ auftreten, auf das Minimum zwei reduziert; desgleichen drücken wir in den nunmehr übrigbleibenden $n-2$ Bedingungsgleichungen die Anzahl der $v^{(n-2)}(0)$ und $v^{(n-2)}(a)$ enthaltenden Gleichungen auf das Minimum zwei herab usf. Demgemäß schreiben wir die normierten Randbedingungen, indem wir in ihnen die auf die verschiedenen Endpunkte bezüglichen Teile getrennt zum Ausdruck bringen, in der Form:

$$f_i(D_x)\,v = f_{i0}(D_x)\,v + f_{ia}(D_x)\,v,$$

(4) $$f_{i0}(D_x)\,v = \alpha_i v^{(k_i)}(0) + \sum_{j=0}^{k_i-1} \alpha_{ij} v^{(j)}(0), \quad f_{ia}(D_x)\,v = \beta_i v^{(k_i)}(a) + \sum_{j=0}^{k_i-1} \beta_{ij} v^{(j)}(a),$$

also nach (2) asymptotisch:

(5) $$f_{i0}(D_x)\,y_\lambda \simeq \alpha_i \{r\,w^{(\lambda)}\}^{k_i}[1], \qquad f_{ia}(D_x)\,y_\lambda \simeq \beta_i \{r\,w^{(\lambda)}\}^{k_i} e^{a r w^{(\lambda)}}[1].$$

Darin sind zufolge des angewandten Normierungsverfahrens keine drei aufeinanderfolgende Größen k_i einander gleich; die α_i, β_i, α_{ij}, β_{ij} bedeuten gewisse Konstanten.

Wir teilen nun wiederum die r-Ebene in S-Sektoren, in deren jedem wir die unteren Indizes $1 \ldots n$ so festlegen, daß

(6), $$\Re(r\,w_1) \leqq \Re(r\,w_2) \leqq \ldots \leqq \Re(r\,w_n),$$

wobei $w_1 \ldots w_n$ jeweils eine bestimmte Permutation der

(7) $$w^{(1)} \ldots w^{(n)}$$

darstellen. Ist $n = 2\mu - 1$, so ist in einem einzelnen S-Gebiet der zu ihm gehörige Ausdruck $\Re(r\,w_\mu)$ teils positiv, teils negativ. Die Grenzen dieser S-Gebiete bilden wiederum die Strahlen: $\arg r = \frac{l\pi}{n}$ $(l = 0, 1, 2, \ldots, n)$; es sind also gerade $2n$ S-Gebiete vorhanden. Wir erläutern ihre Lage an

[16]) Vgl. Birkhoff, l. c. S. 375.

einem konkreten Beispiel, nämlich für $n = 5$ (s. Fig. 4). Es ist z. B. in den in der Figur als S_0, S_1, S_2 bezeichneten Sektoren:

$$S_0: \quad \Re(r w^{(4)}) < \Re(r w^{(3)}) < \Re(r w^{(5)}) < \Re(r w^{(2)}) < \Re(r w^{(1)}),$$
$$S_1: \quad \Re(r w^{(3)}) < \Re(r w^{(4)}) < \Re(r w^{(2)}) < \Re(r w^{(5)}) < \Re(r w^{(1)}),$$
$$S_2: \quad \Re(r w^{(3)}) < \Re(r w^{(2)}) < \Re(r w^{(4)}) < \Re(r w^{(1)}) < \Re(r w^{(5)}).$$

Hieraus ist zugleich ersichtlich, daß im Falle eines ungeraden n die Größe w_μ bei benachbarten S-Gebieten verschieden ist und sich überhaupt nicht so einfache Relationen zwischen den w_i zweier aneinanderstoßender S-Sektoren angeben lassen, wie im Falle des geraden n. Wir bemerken aber, daß auch hier die Beziehung statthat: $w_{\mu-1} = -w_{\mu+1}$, $w_{\mu-2} = -w_{\mu+2}$, ... Halbieren wir jeden Sektor S_i im Punkte γ_i des umschließenden Kreisbogens, so ist, wenn $\arg r < \arg \gamma$ ist, $\Re(r w_\mu) > 0$; wenn aber $\arg r > \arg \gamma$ ist: $\Re(r w_\mu) < 0$, oder umgekehrt, und für $\arg r = \arg \gamma$ wird: $\Re(r w_\mu) = 0$.

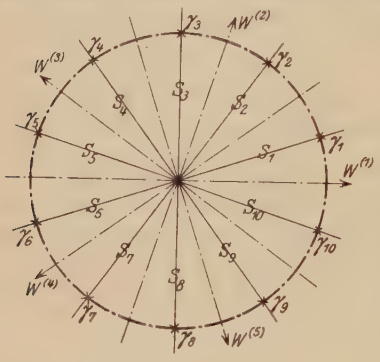

Fig. 4.

Nun können wir in jedem S-Sektor auch die Partikulärintegrale (2) entsprechend den unteren Indizes ordnen, so daß etwa in einem S-Gebiet:

$$(8) \qquad y_{(1)} \simeq e^{r w_1 x}, \quad y_{(2)} \simeq e^{r w_2 x}, \quad \ldots, \quad y_{(n)} \simeq e^{r w_n x}$$

ist. Dann können wir entsprechend (4), (5) in jedem S-Sektor setzen:

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\text{für } j = 1, \ldots, \mu - 1: \quad f_i(D_x)\, y_{(j)} \simeq \alpha_i (r w_j)^{k_i} [1], \\ &\text{für } j = \mu + 1, \ldots, n: \quad f_i(D_x)\, y_{(j)} \simeq e^{a r w_j} (r w_j)^{k_i} \beta_i [1], \\ &\text{für } j = \mu: \quad f_i(D_x)\, y_{(\mu)} \simeq \alpha_i (r w_\mu)^{k_i} [1] + \beta_i e^{a r w_\mu} (r w_\mu)^{k_i} [1]. \end{aligned}$$

Es lautet nun das § 4 (7) entsprechende Gleichungssystem zur Bestimmung der R_λ, wenn wir daselbst lediglich unsere Bezeichnung für die partikulären Integrale von (1) einführen:

$$(10) \qquad R_1 f_\lambda(D_x)\, y_1 + R_2 f_\lambda(D_x)\, y_2 + \ldots + R_n f_\lambda(D_x)\, y_n = \Re_\lambda \mathfrak{F}(r)$$
$$(\lambda = 0, 1, \ldots, n-1),$$

also seine Determinante:

$$\mathfrak{F}(r) = |f_\lambda(D_x)\, y_i| \qquad (\lambda = 0, \ldots, n-1;\ i = 1, \ldots, n).$$

Ordnen wir diese nach den $y_{(i)}$ eines jeden S-Gebietes, so gilt nach (9) in einem bestimmten S-Sektor die asymptotische Darstellung:

$$\mathfrak{F}(r) \simeq \begin{vmatrix} (rw_1)^{k_0}[\alpha_0] & \dots (rw_{\mu-1})^{k_0}[\alpha_0] & (rw_\mu)^{k_0}\{[\alpha_0] + [\beta_0]e^{arw_\mu}\} \\ \dots & \dots & \dots \\ (rw_1)^{k_{n-1}}[\alpha_{n-1}] \dots (rw_{\mu-1})^{k_{n-1}}[\alpha_{n-1}] & (rw_\mu)^{k_{n-1}}\{[\alpha_{n-1}] + [\beta_{n-1}]e^{arw_\mu}\} \\ (rw_{\mu+1})^{k_0} e^{arw_{\mu+1}}[\beta_0] & \dots (rw_n)^{k_0} e^{arw_n}[\beta_0] \\ \dots & \dots \\ (rw_{\mu+1})^{k_{n-1}} e^{arw_{\mu+1}}[\beta_{n-1}] & \dots (rw_n)^{k_{n-1}} e^{arw_n}[\beta_{n-1}] \end{vmatrix}$$

$$\sim \prod_{i=0}^{n-1} r^{k_i} \prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i} \begin{vmatrix} [\alpha_0]w_1^{k_0} & \dots [\alpha_0]w_{\mu-1}^{k_0} & \{[\alpha_0] + [\beta_0]e^{arw_\mu}\}w_\mu^{k_0} \\ \dots & \dots & \dots \\ [\alpha_{n-1}]w_1^{k_{n-1}} \dots [\alpha_{n-1}]w_{\mu-1}^{k_{n-1}} & \{[\alpha_{n-1}] + [\beta_{n-1}]e^{arw_\mu}\}w_\mu^{k_{n-1}} \\ [\beta_0]w_{\mu+1}^{k_0} & \dots [\beta_0]w_n^{k_0} \\ \dots & \dots \\ [\beta_{n-1}]w_{\mu+1}^{k_{n-1}} \dots & [\beta_{n-1}]w_n^{k_{n-1}} \end{vmatrix} \simeq \prod_{i=0}^{n-1} r^{k_i} \prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i} \Delta,$$

wo Δ die zuletzt hingeschriebene Determinante bezeichnet. Die asymptotischen Nullstellen von $\mathfrak{F}(r)$ liegen bei denen von Δ. Letztere Größe können wir nun nach Spaltung der μ-ten Kolonne schreiben:

$$\Delta = \theta_1 + \theta_0 e^{arw_\mu}.$$

indem wir setzen:

$$\theta_0 = \begin{vmatrix} [\alpha_0]\cdot w_1^{k_0} & \dots [\alpha_0]\cdot w_{\mu-1}^{k_0} & [\beta_0]\cdot w_\mu^{k_0} & [\beta_0]\cdot w_{\mu+1}^{k_0} \dots [\beta_0]\cdot w_n^{k_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\alpha_{n-1}]w_1^{k_{n-1}} \dots [\alpha_{n-1}]w_{\mu-1}^{k_{n-1}} & [\beta_{n-1}]w_\mu^{k_{n-1}} & [\beta_{n-1}]w_{\mu+1}^{k_{n-1}} \dots [\beta_{n-1}]w_n^{k_{n-1}} \end{vmatrix},$$

$$\theta_1 = \begin{vmatrix} [\alpha_0]\cdot w_1^{k_0} & \dots [\alpha_0]\cdot w_{\mu-1}^{k_0} & [\alpha_0]\cdot w_\mu^{k_0} & [\beta_0]\cdot w_{\mu+1}^{k_0} \dots [\beta_0]\cdot w_n^{k_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\alpha_{n-1}]w_1^{k_{n-1}} \dots [\alpha_{n-1}]w_{\mu-1}^{k_{n-1}} & [\alpha_{n-1}]w_\mu^{k_{n-1}} & [\beta_{n-1}]w_{\mu-1}^{k_{n-1}} \dots [\beta_{n-1}]w_n^{k_{n-1}} \end{vmatrix}$$

Wir treffen nun die Voraussetzung, daß θ_0 und θ_1 von Null verschieden seien, sie entspricht der Annahme des § 6, daß dort $[A] \neq 0$, $[B] \neq 0$ sein sollten. Auch hier hängt die Erfüllung der gemachten Voraussetzung wesentlich von den vorgelegten Randbedingungen ab, die wir nach diesem Gesichtspunkte als reguläre und irreguläre kennzeichnen. Wir beschäftigen uns also hier nur mit regulären Randbedingungen. Gemäß (12) sind dann die Nullstellen von $\mathfrak{F}(r)$ in ihrer asymptotischen Lage bestimmt durch die Gleichung:

$$e^{arw_\mu} = -\frac{\theta_1}{\theta_0}. \tag{14}$$

Es muß demnach für die Wurzeln r von $\mathfrak{F}(r) = 0$ in der Grenze gelten:

$$r \sim \frac{1}{a w_\mu} \lg\left(-\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) + \frac{2 l \pi i}{a w_\mu}, \tag{15}$$

worin l eine ganze Zahl bedeutet, die wir als groß anzunehmen haben, damit der Absolutwert von r eben so groß werde, daß die gegebene asymptotische Darstellung zulässig ist. Der Realteil von $r w_\mu$ ist nach (15) beschränkt wegen der getroffenen Regularitätsvoraussetzung, es ist somit in der Grenze: $\arg(r w_\mu) \sim \pm \frac{\pi}{2}$, d. h. die Wurzeln r nähern sich asymptotisch den Halbierungslinien der Sektoren S_i, bzw. bleiben innerhalb beliebig kleiner, diese umschließender Winkelräume; sie folgen sich daselbst in einem endlichen, annähernd konstanten Abstande, der asymptotisch den Wert $\frac{2\pi}{a}$ annimmt. Es häufen sich daher die Wurzeln von $\mathfrak{F}(r)$ nicht, so daß wir sie überall durch Sicherheitskreise ausschließen können. Ferner liegen diese Wurzeln asymptotisch wieder in Zyklen, d. h. Kreisen um den Nullpunkt, die sich in endlichem Abstande folgen und deren jeder die n Wurzeln r umfaßt, denen asymptotisch gleicher absoluter Betrag zukommt. Wir können daher zwischen diesen Zyklenkreisen die Integrationslinie K_σ so legen, daß sie in allen Punkten einen positiven Minimalabstand von den Sicherheitskreisen hat.

Nach diesen Vorbereitungen können wir an die Erweiterung unserer Entwicklungen auf den ungeraden Fall gehen. Wir setzen wieder die Gleichungen § 5 (21) an, und müssen in (10) die $\Re_\lambda$ so zu bestimmen suchen, daß diese Relationen erfüllt werden. Wir behaupten, daß letzteres der Fall sei, wenn wir in (10) setzen:

$$\Re_0 = -f_{00}(D_x) y_1 = -f_{00}(r), \quad \Re_1 = -f_{10}(D_x) y_1 = -f_{10}(r), \ldots,$$
$$\Re_{n-1} = -f_{n-1,0}(D_x) y_1 = -f_{n-1,0}(r); \tag{16}$$

d. h. die R_i aus dem Gleichungssystem bestimmen:

$$R_1 f_\lambda(D_x) y_1 + R_2 f_\lambda(D_x) y_2 + \ldots + R_n f_\lambda(D_x) y_n = -f_{\lambda,0}(r)\mathfrak{F}(r)$$
$$(\lambda = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{17}$$

Als erste Entwicklung haben wir die Gleichung § 5 (21a):

$$2\pi i f(x) = \oint_{K\infty} \frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)} \int_0^a e^{r(x-\nu)} f(\nu)\, d\nu\, dr \tag{18}$$

zu beweisen. Darin ist nach (17) die Determinante R_1:

$$R_1 = \begin{vmatrix} -f_{00}(r) & f_0(D_x) y_2 \ldots & f_0(D_x) y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -f_{n-1,0}(r) & f_{n-1}(D_x) y_2 \ldots & f_{n-1}(D_x) y_n \end{vmatrix}.$$

Wir teilen nun die r-Ebene in zwei Hälften, in denen bzw. $\Re(r w^{(1)}) < 0$, $\Re(r w^{(1)}) > 0$ ist, die also durch die imaginäre r''-Achse voneinander getrennt werden. Wir behandeln beide Hälften gesondert.

1. Fall. $\Re(r w^{(1)}) < 0$, d. h. in den betreffenden S-Gebieten gehört $w^{(1)} = 1$ zu den $w_1 \dots w_{\mu-1}$. Wir ordnen R_i nach den $y_{(i)}$ und ziehen die asymptotischen Ausdrücke (9) heran, dann wird:

$$R_1 \simeq \prod_{i=0}^{n-1} r^{k_i} \prod_{\mu+1}^{n} e^{a r w_i} \cdot \begin{vmatrix} [\alpha_0]\, w_1^{k_0} & [\alpha_0]\, w_2^{k_0} & \dots - [\alpha_0] \\ \dots \{[\alpha_0] & + [\beta_0] \cdot e^{a r w_\mu}\} w_\mu^{k_0} & [\beta_0] \cdot w_{\mu+1}^{k_0} \dots [\beta_0] \cdot w_n^{k_0} \\ \dots & \dots & \dots \\ [\alpha_{n-1}]\, w_1^{k_{n-1}} & [\alpha_{n-1}]\, w_2^{k_{n-1}} \dots - [\alpha_{n-1}] & \\ \dots \{[\alpha_{n-1}] & + [\beta_{n-1}]\, e^{a r w_\mu}\} w_\mu^{k_{n-1}} & [\beta_{n-1}]\, w_{\mu+1}^{k_{n-1}} \dots [\beta_{n-1}]\, w_n^{k_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Um den Unterschied zwischen R_1 und $\mathfrak{F}(r)$ deutlicher hervortreten zu lassen, führen wir in $\mathfrak{F}(r)$ in der dem $w^{(1)}$ entsprechenden Kolonne beide den Randbedingungen an den beiden Endpunkten x_0 und x_1 entsprechenden Teile an, setzen also nach (11):

$$\mathfrak{F}(r) \simeq \prod_{i=0}^{n-1} r^{k_i} \prod_{\mu+1}^{n} e^{a r w_i} \cdot \begin{vmatrix} [\alpha_0]\, w_1^{k_0} & \dots [\alpha_0] & + [\beta_0]\, e^{a r} \\ \dots \{[\alpha_0] & + [\beta_0]\, e^{a r w_\mu}\} w_\mu^{k_0} & [\beta_0]\, w_{\mu+1}^{k_0} \dots [\beta_0]\, w_n^{k_0} \\ \dots & \dots & \dots \\ [\alpha_{n-1}]\, w_1^{k_{n-1}} \dots [\alpha_{n-1}] & + [\beta_{n-1}]\, e^{a r} & \\ \dots \{[\alpha_{n-1}] & + [\beta_{n-1}]\, e^{a r w_\mu}\} w_\mu^{k_{n-1}} & [\beta_{n-1}]\, w_{\mu+1}^{k_{n-1}} \dots [\beta_{n-1}]\, w_n^{k_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Daher wird, wenn wir gleich in geeigneter Weise durchdividieren:

$$\frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)} \simeq \frac{-1}{1 + \Phi e^{a r}}, \tag{19}$$

wobei

$$\Phi = \frac{\begin{vmatrix} [\alpha_0] \cdot w_1^{k_0} & \dots [\beta_0] & \dots \{[\alpha_0] & + [\beta_0] \cdot e^{a r w_\mu}\} w_\mu^{k_0} & [\beta_0] \cdot w_{\mu+1}^{k_0} \dots [\beta_0] \cdot w_n^{k_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\alpha_{n-1}]\, w_1^{k_{n-1}} \dots [\beta_{n-1}] & \dots \{[\alpha_{n-1}] & + [\beta_{n-1}]\, e^{a r w_\mu}\} w_\mu^{k_{n-1}} & [\beta_{n-1}]\, w_{\mu+1}^{k_{n-1}} \dots [\beta_{n-1}]\, w_n^{k_{n-1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [\alpha_0] \cdot w_1^{k_0} & \dots [\alpha_0] & \dots \{[\alpha_0] & + [\beta_0] \cdot e^{a r w_\mu}\} w_\mu^{k_0} & [\beta_0] \cdot w_{\mu+1}^{k_0} \dots [\beta_0] \cdot w_n^{k_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\alpha_{n-1}]\, w_1^{k_{n-1}} \dots [\alpha_{n-1}] & \dots \{[\alpha_{n-1}] & + [\beta_{n-1}]\, e^{a r w_\mu}\} w_\mu^{k_{n-1}} & [\beta_{n-1}]\, w_{\mu+1}^{k_{n-1}} \dots [\beta_{n-1}]\, w_n^{k_{n-1}} \end{vmatrix}}.$$

Zunächst sieht man, daß in Φ der Nenner identisch mit der Determinante Δ ist, also seine Nullstellen durch Sicherheitskreise bereits ausgeschieden sind. Ferner sind in Φ Zähler und Nenner bezüglich $e^{a r w_\mu}$ vom gleichen Grade und das von $e^{a r w_\mu}$ unabhängige Glied des Zählers ist θ_1, des Nenners θ_0, verschwindet also nach der gemachten Regularitätsvoraussetzung nicht. Es bleibt somit Φ außerhalb der Sicherheitskreise

beschränkt, sei es, daß $\Re(r w_\mu) < 0$, also $\lim_{|r|\to\infty} e^{a r w_\mu} = 0$, oder sei es, daß $\Re(r w_\mu) > 0$, also: $\lim_{|r|\to\infty} e^{a r w_\mu} = \infty$ ist. Es ist daher im betrachteten Gebiet der r-Ebene, da daselbst $\lim_{|r|\to\infty} e^{a r} = 0$ ist:

$$\lim_{|r|=\infty} \frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)} = -1; \qquad \lim_{|r|=\infty} \frac{R_1 + \mathfrak{F}(r)}{\mathfrak{F}(r)} = \lim_{|r|=\infty} \frac{\Phi e^{a r}}{1 + \Phi e^{a r}} = 0;$$

$$\lim_{|r|=\infty} \frac{R_1 + \mathfrak{F}(r)}{\mathfrak{F}(r)} e^{r(x-a)} = \lim_{|r|=\infty} \frac{\Phi e^{r x}}{1 + \Phi e^{a r}} = 0. \tag{20}$$

Eine besondere Bemerkung benötigen die beiden S-Gebiete, die um die imaginäre Achse liegen; sie werden durch diese halbiert, und der Durchstoßpunkt auf der Kreisperipherie ist einer unsrer Teilungspunkte γ. Derjenige Teil der r-Ebene, in dem $\Re(r) < 0$ ist, greift je in eine Hälfte dieser beiden S-Sektoren über. Bei der Betrachtung auf der Kontur K_n gehen wir an den Punkt γ bis auf einen endlichen Abstand δ heran; es gilt dann in diesen beiden S-Gebieten ebenfalls die Beziehung (19), nur ist Φ, da hier $w_\mu = w^{(1)} = 1$ ist, gegeben durch:

$$\Phi = \frac{\begin{vmatrix} [\alpha_0] \cdot w_1^{k_0} & \dots & [\beta_0] & [\beta_0] \cdot w_{\mu+1}^{k_0} & \dots & [\beta_0] \cdot w_n^{k_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\alpha_{n-1}] w_1^{k_{n-1}} & \dots & [\beta_{n-1}] & [\beta_{n-1}] w_{\mu+1}^{k_{n-1}} & \dots & [\beta_{n-1}] w_n^{k_{n-1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [\alpha_0] \cdot w_1^{k_0} & \dots & [\alpha_0] & [\beta_0] \cdot w_{\mu+1}^{k_0} & \dots & [\beta_0] \cdot w_n^{k_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\alpha_{n-1}] w_1^{k_{n-1}} & \dots & [\alpha_{n-1}] & [\beta_{n-1}] w_{\mu+1}^{k_{n-1}} & \dots & [\beta_{n-1}] w_n^{k_{n-1}} \end{vmatrix}} = \frac{\theta_0}{\theta_1}.$$

Es ist daher auch hier Φ in jedem Falle beschränkt und außerhalb des Gebietes δ derselbe Schluß zu ziehen, wie oben; innerhalb δ aber ist:

$$\frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)} \sim \frac{-\theta_1}{\theta_1 + \theta_0 e^{a r}}, \qquad \frac{R_1 + \mathfrak{F}(r)}{\mathfrak{F}(r)} = \frac{\theta_0 e^{a r}}{\theta_1 + \theta_0 e^{a r}}, \qquad \frac{R_1 + \mathfrak{F}(r)}{\mathfrak{F}(r)} e^{r(x-a)} \sim \frac{\theta_0 e^{r x}}{\theta_1 + \theta_0 e^{a r}},$$

also alle drei Größen außerhalb der Sicherheitskreise beschränkt.

2. Fall. $\Re(r w^{(1)}) > 0$, d. h. $w^{(1)} = 1$ zählt in den betroffenen S-Gebieten zu den $w_{\mu+1} \dots w_n$. Der Fall, daß $w^{(1)} = 1$ ist, bedarf wieder einer Sonderbetrachtung. Wir erhalten asymptotisch:

$$R_1 \sim \frac{1}{e^{a r}} \prod_{i=0}^{n-1} r^{k_i} \prod_{\mu+1}^{n} e^{a r w_i} \begin{vmatrix} [\alpha_0] \cdot w_1^{k_0} & \dots & \{[\alpha_0] + [\beta_0] \cdot e^{a r w_\mu}\} w_\mu^{k_0} & [\beta_0] \cdot w \\ & & \dots - [\alpha_0] & \dots [\beta_0] \cdot w \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\alpha_{n-1}] w_1^{k_{n-1}} & \dots & \{[\alpha_{n-1}] + [\beta_{n-1}] e^{a r w_\mu}\} w_\mu^{k_{n-1}} & [\beta_{n-1}] w \\ & & \dots - [\alpha_{n-1}] & \dots [\beta_{n-1}] u \end{vmatrix}$$

wo der Nenner e^{ar} daher rührt, daß in der dem $w^{(1)}$ entsprechenden Spalte kein Faktor e^{ar} auftritt, dieser also im Zähler einmal zuviel genommen ist. Es gilt daher bei Benutzung von (11):

$$\frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)} \sim \frac{-1}{e^{ar}} \begin{vmatrix} [\alpha_0]\cdot w_1^{k_0} & \dots & [\alpha_0]\cdot w_{\mu-1}^{k_0} & \dfrac{[\alpha_0]+[\beta_0]\,e^{ar w_\mu}}{[\theta_1]+[\theta_0]\,e^{ar w_\mu}}\, w_\mu^{k_0} & [\beta_0]\cdot w_{\mu+1}^{k_0} \\ & & & \dots [\alpha_0] \dots [\beta_0]\cdot w_n^{k_0} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\alpha_{n-1}]\, w_1^{k_{n-1}} & \dots & [\alpha_{n-1}]\, w_{\mu-1}^{k_{n-1}} & \dfrac{[\alpha_{n-1}]+[\beta_{n-1}]\,e^{ar w_\mu}}{[\theta_1]+[\theta_0]\,e^{ar w_\mu}}\, w_\mu^{k_{n-1}} & [\beta_{n-1}]\, w_{\mu+1}^{k_{n-1}} \\ & & & \dots [\alpha_{n-1}] \dots [\beta_{n-1}]\, w_n^{k_{n-1}} & \end{vmatrix}$$

Die letzte Determinante ist außerhalb der Sicherheitskreise stets beschränkt, denn sie ist in der μ-ten Spalte bezüglich $e^{ar w_\mu}$ vom gleichen Grade in Zähler und Nenner, und nähert sich einem endlichen, von Null verschiedenem Grenzwert an, wenn $e^{ar w_\mu}$ gegen ∞ geht; dasselbe gilt, wenn letztere Größe gegen Null konvergiert, weil $[\theta_1] \neq 0$ vorausgesetzt ist. Es ist daher im betrachteten Falle:

$$(21)\qquad \lim_{|r|=\infty} \frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)} = 0\,, \qquad \lim_{|r|=\infty} \frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)}\, e^{rx} = 0\,, \qquad \lim_{r|=\infty} \frac{R_1 + \mathfrak{F}(r)}{\mathfrak{F}(r)} = +1\,.$$

Entsprechendes gilt, wenn $w^{(1)} = w_\mu = 1$ ist; dann fällt in $\frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)}$ nur vorn der Faktor $\frac{1}{e^{ar}}$ und in der μ-ten Spalte im Zähler das Glied mit $e^{ar w_\mu}$ fort, während der Nenner unverändert bleibt. Gehen wir daher bis auf den endlichen Abstand δ, außerhalb dessen sich $e^{ar w_\mu}$ mit $|r| \to \infty$ beliebig großen Werten nähert, an den Durchstoßpunkt der imaginären Achse mit der Kontur K_σ heran, so bleiben in diesem Gebiete die Beziehungen (21) ungeändert. Schließlich ist in dem beliebig kleinen Winkelraum $\pm\delta$, den wir um die imaginäre Achse herum auf K_σ freigelassen haben, unter Ausschluß der Sicherheitskreise jede der betrachteten Größen beschränkt. Es sind somit alle Voraussetzungen des Satzes 3, § 2, erfüllt, wenn wir daselbst:

$$\chi(r) = R_1\,, \quad \psi(r) = R_1 + 1\cdot\mathfrak{F}(r), \quad \omega(r) = 1\,, \quad c_1 = -c_2 = -1$$

setzen, somit gibt seine Anwendung:

$$2\pi i f(x) = \oint_{K_\infty} \frac{R_1}{\mathfrak{F}(r)} \int_0^a e^{r(x-\nu)} f(\nu)\, d\nu\, dr\,,$$

w. z. b. w.

Nunmehr gehen wir an den Beweis der zweiten Gleichung § 5 (21). Das Gleichungssystem (17) gibt für R_2 den Ausdruck:

$$R_2 = -\begin{vmatrix} f_0(D_x)\,y_1 & f_{00}(D_x)\,y_1 & f_0(D_x)\,y_3 & \dots & f_0(D_x)\,y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1}(D_x)\,y_1 & f_{n-1,0}(D_x)\,y_1 & f_{n-1}(D_x)\,y_3 & \dots & f_{n-1}(D_x)\,y_n \end{vmatrix}$$

oder, nach Subtraktion der zweiten Spalte von der ersten:

$$R_2 = -\begin{vmatrix} f_{0a}(D_x)\,y_1 & f_{00}(D_x)\,y_1 & f_0(D_x)\,y_3 & \dots & f_0(D_x)\,y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1,a}(D_x)\,y_1 & f_{n-1,0}(D_x)\,y_1 & f_{n-1}(D_x)\,y_3 & \dots & f_{n-1}(D_x)\,y_n \end{vmatrix},$$

mithin ist nach (9) die asymptotische Darstellung:

$$R_2 \simeq \prod_{i=0}^{n-1} r^{k_i} \begin{vmatrix} [\beta_0]\cdot e^{ar\,w^{(1)k_0}} & [\alpha_0]\cdot w^{(1)k_0} & \{[\alpha_0] + [\beta_0]\cdot e^{ar\,w^{(3)}}\}\,w^{(3)k_0} \\ \dots & \dots & \dots \\ [\beta_{n-1}]\,e^{ar\,w^{(1)k_{n-1}}} & [\alpha_{n-1}]\,w^{(1)k_{n-1}} & \{[\alpha_{n-1}] + [\beta_{n-1}]\,e^{ar\,w^{(3)}}\}\,w^{(3)k_{n-1}} \end{vmatrix}$$

$$\dots \{[\alpha_0] + [\beta_0]\cdot e^{ar\,w^{(n)}}\}\,w^{(n)k_0}$$

(22)

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \{[\alpha_{n-1}] + [\beta_{n-1}]\,e^{ar\,w^{(n)}}\}\,w^{(n)k_{n-1}}$$

Wir teilen nun die r-Ebene in vier Gebiete, in denen bzw.

1. $\Re(r\,w^{(1)}) > 0$; $\Re(r\,w^{(2)}) > 0$;
2. $\Re(r\,w^{(1)}) > 0$; $\Re(r\,w^{(2)}) < 0$;
3. $\Re(r\,w^{(1)}) < 0$; $\Re(r\,w^{(2)}) > 0$;
4. $\Re(r\,w^{(1)}) < 0$; $\Re(r\,w^{(2)}) < 0$

ist, eine Einteilung, wie wir sie schon in Fig. 3 uns veranschaulicht haben. Wir behandeln die vier Fälle gesondert.

1. Fall. $\Re(r\,w^{(1)}) > 0$; $\Re(r\,w^{(2)}) > 0$. Es gehören $w^{(1)} = 1$ und $w^{(2)}$ zu den $w_{\mu+1} \dots w_n$ der S-Sektoren, in denen dieser Fall eintritt. Wir ordnen wieder nach den unteren Indizes der w_i und bezeichnen die dem $w^{(1)}$ bzw. $w^{(2)}$ entsprechende Spalte am Kopf besonders. Dann gibt (22):

$$R_2 \simeq -\prod_{i=0}^{n-1} r^{k_i}\,\frac{\prod_{\mu+1}^{n} e^{ar\,w_i}}{e^{ar\,w^{(2)}}} \begin{vmatrix} [\alpha_0]\,w_1^{k_0} & \dots & [\alpha_0]\,w_{\mu-1}^{k_0} & \{[\alpha_0] + [\beta_0]\,e^{ar\,w_\mu}\}\,w_\mu^{k_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\alpha_{n-1}]\,w_1^{k_{n-1}} & \dots & [\alpha_{n-1}]\,w_{\mu-1}^{k_{n-1}} & \{[\alpha_{n-1}] + [\beta_{n-1}]\,e^{ar\,w_\mu}\}\,w_\mu^{k_{n-1}} \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} & \boxed{w^{(1)}} & & \boxed{w^{(2)}} & \\ \dots & [\beta_0] & \dots & [\alpha_0] & \dots \{[\alpha_0]\,e^{-ar\,w_n} + [\beta_0]\}\,w_n^{k_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & [\beta_{n-1}] & \dots & [\alpha_{n-1}] & \dots \{[\alpha_{n-1}]\,e^{-ar\,w_n} + [\beta_{n-1}]\}\,w_n^{k_{n-1}} \end{matrix}$$

Der Nennerfaktor $e^{ar\,w^{(2)}}$ rührt daher, daß der gleiche Term im Zähler einmal zuviel auftritt, da in der dem $w^{(2)}$ entsprechenden Kolonne dieser Faktor gar nicht vorkommt. Weiter ist

$$\mathfrak{F}(r) \simeq \prod_{i=0}^{n-1} r^{k_i} \prod_{\mu+1}^{n} e^{a r w_i}$$

$$\begin{vmatrix}
[\alpha_0]\cdot w_1^{k_0} & \dots & [\alpha_0]\cdot w_{\mu-1}^{k_0} & \{[\alpha_0] & +[\beta_0]\cdot e^{a r w_\mu}\} w_\mu^{k_0} & \dots & [\alpha_0]\cdot e^{-ar}+[\beta_0] \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
[\alpha_{n-1}] w_1^{k_{n-1}} & \dots & [\alpha_{n-1}] w_{\mu-1}^{k_{n-1}} & \{[\alpha_{n-1}]+[\beta_{n-1}] e^{a r w_\mu}\} w_\mu^{k_{n-1}} & & \dots & [\alpha_{n-1}] e^{-ar}+[\beta_{n-1}] \\
\dots & \{[\alpha_0]\cdot e^{-a r w^{(2)}}+[\beta_0]\} \cdot w^{(2) k_0} & & \dots & \{[\alpha_0]\cdot e^{-a r w_n}+[\beta_0]\}\cdot w_n^{k_0} & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \{[\alpha_{n-1}] e^{-a r w^{(2)}}+[\beta_{n-1}]\} w^{(2) k_{n-1}} & & \dots & \{[\alpha_{n-1}] e^{-a r w_n}+[\beta_{n-1}]\} w_n^{k_{n-1}} & &
\end{vmatrix}$$

Wir können also nach der Entwicklung schreiben:

$$R_2 \simeq -\prod_{i=0}^{n-1} r^{k_i} \frac{\prod_{\mu+1}^{n} e^{a r w_i}}{e^{a r w^{(2)}}} \{T_0 + \varepsilon\},$$

(23)

$$\mathfrak{F}(r) \simeq \prod_{i=0}^{n-1} r^{k_i} \prod_{\mu+1}^{n} e^{a r w_i} \{T_1 e^{-a r w^{(2)}} + T_2 + \varepsilon\},$$

wobei

$$\begin{vmatrix}
[\alpha_0]\cdot w_1^{k_0} & \dots & [\alpha_0]\cdot w_{\mu-1}^{k_0} & \{[\alpha_0] & +[\beta_0]\cdot e^{a r w_\mu}\} w_\mu^{k_0} & [\beta_0]\cdot w_{\mu+1}^{k_0} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
[\alpha_{n-1}] w_1^{k_{n-1}} & \dots & [\alpha_{n-1}] w_{\mu-1}^{k_{n-1}} & \{[\alpha_{n-1}]+[\beta_{n-1}] e^{a r w_\mu}\} w_\mu^{k_{n-1}} & & [\beta_{n-1}] w_{\mu+1}^{k_{n-1}}
\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}
\boxed{w^{(1)}} & & \boxed{w^{(2)}} & \\
\dots [\beta_0] & \dots [\alpha_0] & \dots [\beta_0]\cdot w_n^{k_0} & \\
\dots & \dots & \dots & , \\
\dots [\beta_{n-1}] & \dots [\alpha_{n-1}] & \dots [\beta_{n-1}] w_n^{k_{n-1}} &
\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}
[\alpha_0]\cdot w_1^{k_0} & \dots & [\alpha_0]\cdot w_{\mu-1}^{k_0} & \{[\alpha_0] & +[\beta_0]\cdot e^{a r w_\mu}\} w_\mu^{k_0} & [\beta_0]\cdot w_{\mu+1}^{k_0} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
[\alpha_{n-1}] w_1^{k_{n-1}} & \dots & [\alpha_{n-1}] w_{\mu-1}^{k_{n-1}} & \{[\alpha_{n-1}]+[\beta_{n-1}] e^{a r w_\mu}\} w_\mu^{k_{n-1}} & & [\beta_{n-1}] w_{\mu+1}^{k_{n-1}}
\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}
\dots [\beta_0] & \dots [\alpha_0]\cdot w^{(2) k_0} & \dots [\beta_0]\cdot w_n^{k_0} & \\
\dots & \dots & \dots & , \\
\dots [\beta_{n-1}] & \dots [\alpha_{n-1}] w^{(2) k_{n-1}} & \dots [\beta_{n-1}] w_n^{k_{n-1}} &
\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}
[\alpha_0]\cdot w_1^{k_0} & \dots & [\alpha_0]\cdot w_{\mu-1}^{k_0} & \{[\alpha_0] & +[\beta_0]\cdot e^{a r w_\mu}\} w_\mu^{k_0} & [\beta_0]\cdot w_{\mu+1}^{k_0} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
[\alpha_{n-1}] w_1^{k_{n-1}} & \dots & [\alpha_{n-1}] w_{\mu-1}^{k_{n-1}} & \{[\alpha_{n-1}]+[\beta_{n-1}] e^{a r w_\mu}\} w_\mu^{k_{n-1}} & & [\beta_{n-1}] w_{\mu+1}^{k_{n-1}}
\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}
\dots [\beta_0] & \dots [\beta_0]\cdot w^{(2) k_0} & \dots [\beta_0]\cdot w_n^{k_0} & \\
\dots & \dots & \dots & . \\
\dots [\beta_{n-1}] & \dots [\beta_{n-1}] w^{(2) k_{n-1}} & \dots [\beta_{n-1}] w_n^{k_{n-1}} &
\end{vmatrix}$$

In (23) sind alle mit $|r| \to \infty$ verschwindenden Entwicklungsglieder in einen Term ε vereinigt. Es ist danach:

$$\frac{R_2}{\mathfrak{F}(r)} \sim \frac{T_0}{T_1 + T_2 e^{arw^{(2)}}}.$$

Die Verhältnisse der Determinanten T_0, T_1, T_2 sind, wie man leicht sieht, aus den gleichen Gründen, wie die schon oben behandelten Determinanten auf der Integrationslinie beschränkt. Auszuschließen sind von der Betrachtung die Punkte, in denen: $e^{arw^{(2)}} = -\frac{T_1}{T_2}$ wird; in diesen müßte jedenfalls $rw^{(2)}$ einen endlichen Realteil haben, der mit $|r| \to \infty$ weder positiv noch negativ unendlich groß würde, was nur möglich ist, wenn $w^{(2)}$ gleich dem w_μ des betrachteten S-Sektors ist; dann werden aber die Determinanten T_1, T_2 bzw. gleich θ_1, θ_0, also die obige Gleichung identisch mit (14), d. h. die auszuschließenden Stellen sind die bereits durch Sicherheitskreise eliminierten Punkte. Außerhalb dieser Kreise ist also im betrachteten Gebiet:

$$(24) \quad \lim_{|r| \to \infty} e^{arw^{(2)}} = \infty, \quad \text{also:} \quad \lim_{|r| \to \infty} \frac{R_2}{\mathfrak{F}(r)} = 0, \quad \lim_{r| \to \infty} \frac{R_2}{\mathfrak{F}(r)} e^{rw^{(2)}x} = 0.$$

Dies gilt, abgesehen von einem beliebig kleinen Winkelraum 2δ der Integrationskontur, der um die Stellen gelegt ist, in denen: $\Re(r) = 0$, bzw. $\Re(rw^{(2)}) = 0$ ist, und innerhalb dessen die besagten Größen beschränkt bleiben.

2. Fall. $\Re(rw^{(1)}) > 0$; $\Re(rw^{(2)}) < 0$. Es gehört $w^{(1)}$ zu den $w_{\mu+1} \dots w_n$, $w^{(2)}$ zu den $w_1 \dots w_{\mu-1}$ der betroffenen S-Sektoren. Es ist:

$$R_2 \sim - \prod_{i=0}^{n-1} r^{k_i} \prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}$$

$$\begin{vmatrix} & \boxed{w^{(2)}} & & \\ |\alpha_0| \cdot w_1^{k_0} & \dots [\alpha_0] & \dots \{|\alpha_0| + [\beta_0] \cdot e^{arw_\mu}\} w_\mu^{k_0} & \{[\alpha_0] \cdot e^{-arw_{\mu+1}} + [\beta_0]\} w \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ |\alpha_{n-1}| w_1^{k_n} \dots & [\alpha_{n-1}] \dots & \{|\alpha_{n-1}| + [\beta_{n-1}] e^{arw_\mu}\} w_\mu^{k_{n-1}} & \{[\alpha_{n-1}] e^{-arw_{\mu+1}} + [\beta_{n-1}]\} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{w^{(1)}} & \\ \dots [\beta_0] & \dots \{[\alpha_0] e^{-arw_n} + [\beta_0]\} \cdot w_n^{k_0} \\ \dots & \dots \\ \dots [\beta_{n-1}] & \dots \{[\alpha_{n-1}] e^{-arw_n} + [\beta_{n-1}]\} w_n^{k_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

$\mathfrak{F}(r)$ bleibt dasselbe wie im vorigen Falle, nur daß die dem $w^{(2)}$ entsprechende Spalte in die erste Hälfte des Determinantenschemas rückt. Also wird ähnlich wie oben:

$$\frac{R_2}{\mathfrak{F}(r)} \sim \frac{-T_0'}{T_1' + T_2' e^{arw^{(2)}}},$$

wobei T_0', T_1', T_2' dieselben Determinanten wie T_0', T_1', T_2' sind, nur daß die zu $w^{(2)}$ gehörige Kolonne in die entsprechende Stelle der ersten Determinantenhälfte zu setzen ist. Es bleibt mithin $\frac{R_2}{\mathfrak{F}(r)}$ auf der Integrationslinie beschränkt außerhalb der schon durch Sicherheitskreise ausgeschlossenen Stellen, in denen der Nenner verschwindet, d. h. $e^{arw^{(2)}} = -\frac{T_1'}{T_2'}$ ist. Ferner ist:

$$(25) \qquad \lim_{|r|\to\infty} \frac{R_2}{\mathfrak{F}(r)}\, e^{rw^{(2)}x} \sim \frac{-T_0' e^{rw^{(2)}x}}{T_1' + T_2' e^{arw^{(2)}}} = 0.$$

Ausgenommen sind wiederum die schon oben bezeichneten, um die Strahlen, auf denen $\Re(r) = 0$ oder $\Re(rw^{(2)}) = 0$ ist, gelegenen beliebig kleinen Winkelräume, in denen die betrachteten Größen beschränkt bleiben.

3. Fall. $\Re(rw^{(1)}) < 0$; $\Re(rw^{(2)}) > 0$. Es gehört $w^{(1)}$ zu den $w_1, \ldots, w_{\mu-1}$; $w^{(2)}$ zu den $w_{\mu+1}, \ldots, w_n$ der S-Gebiete, in denen dieser Fall realisiert ist. Es ist dann:

$$\sim -\prod_{i=0}^{n-1} r^{k_i} \frac{\prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i}}{e^{arw^{(2)}}}\, e^{ar} \begin{vmatrix} \overset{w^{(1)}}{\boxed{}} & & & \overset{w^{(2)}}{\boxed{}} & \\ [\alpha_0]\cdot w_1^{k_0} & \ldots & [\beta_0] & \ldots & \{[\alpha_0] + [\beta_0]\cdot e^{arw_\mu}\} w_\mu^{k_0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [\alpha_{n-1}] w_1^{k_{n-1}} & \ldots & [\beta_{n-1}] & \ldots & \{[\alpha_{n-1}] + [\beta_{n-1}] e^{arw_\mu}\} w_\mu^{k_{n-1}} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \{[\alpha_0]\cdot e^{-arw_{\mu+1}} + [\beta_0]\} \cdot w_{\mu+1}^{k_0} & \ldots & [\alpha_0] & \ldots & \{[\alpha_0]\cdot e^{-arw_n} + [\beta_0]\} \cdot w_n^{k_0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \{[\alpha_{n-1}] e^{-arw_{\mu+1}} + [\beta_{n-1}]\} w_{\mu+1}^{k_{n-1}} & \ldots & [\alpha_{n-1}] & \ldots & \{[\alpha_{n-1}] e^{-arw_n} + [\beta_{n-1}]\} w_n^{k_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

$\mathfrak{F}(r)$ behält seinen alten Ausdruck bei, nur mit entsprechender Verschiebung des Determinantenschemas. Es wird daher:

$$(26) \qquad \frac{R_2}{\mathfrak{F}(r)} \sim \frac{-T_0'' e^{ar}}{T_1'' + T_2'' e^{arw^{(2)}}}; \qquad \frac{R_2 e^{rw^{(2)}x}}{\mathfrak{F}(r)} \sim \frac{-T_0'' e^{ar}}{T_1'' e^{-rw^{(2)}x} + T_2'' e^{rw^{(2)}(a-x)}};$$

$$\frac{R_2 e^{rw^{(2)}x}}{\mathfrak{F}(r)}\, e^{-ar} \sim \frac{-T_0''}{T_1'' e^{-rw^{(2)}x} + T_2'' e^{rw^{(2)}(a-x)}}.$$

Dabei sind T_0'', T_1'', T_2'' die gleichen Determinanten wie T_0, T_1, T_2, nur daß die zu $w^{(1)}$ gehörige Spalte in die linke Hälfte derselben zu rücken ist. Alle drei Ausdrücke (36) gehen im bezeichneten Bereiche unter Ausnahme der Sicherheitskreise und der δ-Winkelräume mit $|r| \to \infty$ gegen Null; in letzteren bleiben sie, wie immer, beschränkt.

4. Fall. $\Re(rw^{(1)}) < 0$; $\Re(rw^{(2)}) < 0$. Es gehören $w^{(1)}$ und $w^{(2)}$ den $w_1 \ldots w_{\mu-1}$ der betreffenden S-Sektoren an. Wir finden:

$$R_2 \simeq -\prod_{i=0}^{n-1} r^{k_i} \prod_{\mu+1}^{n} e^{arw_i} e^{ar}$$

$$\begin{vmatrix} [\alpha_0]\cdot w_1^{k_0} & \overset{w^{(2)}}{\ldots}\,[\alpha_0] & \ldots\,[\beta_0] & \ldots\,\{[\alpha_0] & +[\beta_0]\cdot e^{arw_\mu}\}\,w_\mu^{k_0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [\alpha_{n-1}]\,w_1^{k_{n-1}} & \ldots\,[\alpha_{n-1}] & \ldots\,[\beta_{n-1}] & \ldots\,\{[\alpha_{n-1}] & +[\beta_{n-1}]\,e^{arw_\mu}\}\,w_\mu^{k_{n-1}} \\ \{[\alpha_0]\cdot e^{-arw_{\mu+1}}+[\beta_0]\}\cdot w_{\mu+1}^{k_0} & \ldots & \ldots & \ldots & \{[\alpha_0]\cdot e^{-arw_n}+[\beta_0]\}\,w_n^{k_0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \{[\alpha_{n-1}]\,e^{-arw_{\mu+1}}+[\beta_{n-1}]\}\,w_{\mu+1}^{k_{n-1}} & \ldots & \ldots & \ldots & \{[\alpha_{n-1}]\,e^{-arw_n}+[\beta_{n-1}]\}\,w_n^{k_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Somit ist:

$$(27)\quad \frac{R_2}{\mathfrak{F}(r)} \sim \frac{-T_0'''\,e^{ar}}{T_1'''+T_2'''\,e^{arw^{(2)}}};\qquad \frac{R_2\,e^{rw^{(2)}x}}{\mathfrak{F}(r)} \sim \frac{-T_0'''\,e^{ar}}{T_1'''\,e^{-rw^{(2)}x}+T_2'''\,e^{rw^{(2)}(a-x)}};$$

$$\frac{R_2\,e^{rw^{(2)}x}}{\mathfrak{F}(r)}\,e^{-ar} \sim \frac{-T_0'''}{T_1'''\,e^{-rw^{(2)}x}+T_2'''\,e^{rw^{(2)}(a-x)}}.$$

Dabei sind wiederum T_0''', T_1''', T_2''' bis auf die Anordnung der Spalten mit T_0, T_1, T_2 identisch, und die Ausdrücke (27) konvergieren auf der Integrationskontur außerhalb der Sicherheitskreise und der δ-Winkelräume mit wachsendem $|r|$ gegen Null.

Betrachten wir nun die Größe: $\oint_{K_\infty} \frac{R_2\,e^{rw^{(2)}x}}{\mathfrak{F}(r)} \int_0^a e^{-r\nu} f(\nu)\,d\nu\,dr$, so können wir wörtlich die Schlüsse von § 8 (Ende) wiederholen und sehen, daß der Satz 2 des § 2 bzw. das zugehörige Korollar anwendbar wird, da alle Voraussetzungen desselben erfüllt sind. Somit gibt die Benutzung des besagten Lemmas die gesuchte Beziehung:

$$(28)\qquad \oint_{K_\infty} \frac{R_2\,e^{rw^{(2)}(x-x_0)}}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} e^{r(x_0-\nu)} f(\nu)\,d\nu\,dr = 0.$$

Das gleiche Resultat gilt, wenn man hierin den oberen Index 2 von $w^{(2)}$ durch $3 \ldots n$, und gleichzeitig R_2 durch $R_3, \ldots, R_n$ ersetzt. Es gelten also die Relationen § 5 (21) auch für den Fall eines ungeraden n, wenn man $R_1, \ldots, R_n$ durch das verallgemeinerte Gleichungssystem (17) bestimmt. Daher läßt sich der Satz des § 9 auch für diesen Fall modifizieren.

Wir erwähnen noch, daß natürlich der gleiche Beweisgang gültig bleibt, wenn das vorgelegte Problem zwar von gerader Ordnung ist, die Randbedingungen aber nicht, wie früher vorausgesetzt, symmetrisch auf die Intervallendpunkte verteilt, sondern beliebig, wenn nur regulär im

Birkhoff-Tamarkineschen Sinne, auf die beiden Endpunkte bezüglich sind. Wir stellen daher den folgenden parallelen Satz auf:

Satz. *Sei $F(r, s)$ eine ganze, rationale Funktion der Variablen r, s vom Grade n bezüglich r und vom Grade m bezüglich s, in der die Variablen getrennt und die Koeffizienten konstant sind. Sei ferner die Differentialgleichung vorgelegt:*

$$F(D_x, D_t)\, z = 0$$

mit den normierten, regulären, linearen homogenen Randbedingungen:

$$f_\lambda(D_x)\, z = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, n-1);$$

wobei:

$$f_\lambda = f_{\lambda 0} + f_{\lambda a},$$

und sich $f_{\lambda 0}$ auf den unteren Intervallendpunkt x_0, $f_{\lambda a}$ auf den oberen x_1 des räumlichen Integrationsgebietes bezieht, ferner mit den Anfangsbedingungen:

$$\text{für } t = t_0\text{:}\quad z = \bar{f}_0(x),\ \frac{\partial z}{\partial t} = \bar{f}_1(x),\ \ldots,\ \frac{\partial^{m-1} z}{\partial t^{m-1}} = \bar{f}_{m-1}(x).$$

Ist dann $V = \Phi(x, r)$ eine Lösung der Differentialgleichung:

$$F(D_x, s)\, V = V \cdot F(r, s),$$

die die Randbedingungen erfüllt:

$$f_\lambda(D_x)\, V = -f_{\lambda 0}(r) \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, n-1),$$

so gilt zwischen den Grenzen x_0 und x_1 die Entwicklung:

$$f(x) = \sum_r \operatorname{Res} \Phi(x, r) \int_{x_0}^{x_1} e^{-r(\nu - x_0)} f(\nu)\, d\nu,$$

gültig für jede stückweise stetige, beschränkte und mit beschränkter, integrierbarer Ableitung versehene Funktion $f(x)$ und das Integral des bezeichneten Differentialproblems lautet:

$$z = \oint_{K_x} \oint \frac{e^{s(t-t_0)}}{F(r, s)}\, \Phi(x, r) \int_{x_0}^{x_1} e^{-r(\nu - x_0)}\, \frac{F(r, s) - F(r, \bar{f}(\nu))}{s - \bar{f}(\nu)}\, d\nu\, \frac{dr}{2\pi i}\, \frac{ds}{2\pi i},$$

wobei im inneren Integranden in der Entwicklung nach Potenzen von $f(\nu)$ die Exponenten durch Indizes zu ersetzen sind und die Konturintegrale sich über die unendlich große Kreiskontur der r- bzw. s-Ebene erstrecken.

Man sieht, daß dieser Satz den des § 9 als Spezialfall umfaßt, und überhaupt die hier erhaltene Entwicklung von wesentlich allgemeinerem Charakter ist als jene.

§ 11.

Anwendungen.

Zum Schluß wollen wir in diesem Paragraphen einige Beispiele anführen, die zwar zu teilweise schon bekannten Formeln leiten, aber doch geeignet sind, zu zeigen, wie schnell die von uns gegebenen Formeln und Methoden zum Ziele führen.

1. Beispiel. Die Wärmeausbreitung in einem homogenen metallischen Stabe wird bestimmt durch die Differentialgleichung[17]):

$$k\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - hz = \frac{\partial z}{\partial t}, \tag{1}$$

worin h und k Konstanten bedeuten. Die Rand- und Anfangsbedingungen seien:

für $x = x_0$: $f_0(D_x)z = 0$; $x = x_1$: $f_1(D_x)z = 0$; $t = t_0$: $z = f(x)$.

Hier ist:

$$F(r, s) = r^2 - \frac{h}{k} - \frac{1}{k}s; \quad \text{also:} \quad r_1 = +r, \quad r_2 = -r$$

$$\frac{F(r, s) - F(r, \bar{f})}{s - \bar{f}} = -\frac{1}{k}\bar{f}_0 = -\frac{1}{k}\bar{f}.$$

Die Gleichungen, die § 4 (10) und § 8 (32) entsprechen, lauten:

$$\begin{aligned} &R_1 f_0(r) \quad + R_2 f_0(-r) \quad = 0 \\ &R_1 e^{ar} f_1(r) + R_2 e^{-ar} f_1(-r) = e^{ar} f_1(r)\mathfrak{F}(r), \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} &R_1 = -e^{ar} f_1(r) f_0(-r); \quad R_2 = e^{ar} f_1(r) f_0(r); \\ &v = e^{ar} f_1(r)\{-f_0(-r)e^{r(x-x_0)} + f_0(r)e^{-r(x-x_0)}\}. \end{aligned}$$

Wir setzen $x_0 = t_0 = 0$ und finden die Lösung von (1) zufolge des Satzes in § 9:

$$z = \sum_r \sum_s \operatorname{Res}_{r,s} \frac{e^{ar} f_1(r)\{-f_0(r)e^{-rx} + f_0(-r)e^{rx}\}e^{st}}{(s+h-kr^2)\{e^{-ar} f_0(r) f_1(-r) - e^{ar} f_0(-r) f_1(r)\}} \int_0^a f(\nu) e^{-r\nu}\, d\nu$$

oder, wenn wir das Residuum bezüglich s ausführen:

$$z = \sum_r \operatorname{Res}_r \frac{f_1(r)\{f_0(-r)e^{rx} - f_0(r)e^{-rx}\}}{e^{ar} f_0(-r) f_1(r) - e^{-ar} f_0(r) f_1(-r)} e^{(kr^2-h)t} \int_0^a e^{r(a-\nu)} \bar{f}(\nu)\, d\nu. \tag{2}$$

Speziell seien folgende Randbedingungen vorgelegt:

a) $$z|^0 = z|^a = 0, \quad \text{also} \quad f_0(r) = f_1(r) = r^0 = 1,$$

[17]) Vgl. Kneser, a. a. O. S. 1.

(2) gibt: $$z = \sum_r \operatorname{Res} \frac{\operatorname{Sin} rx}{\operatorname{Sin} ar}\, e^{(kr^2-h)t} \int_0^a e^{r(a-\nu)} \bar{f}(\nu)\, d\nu.$$

Die Nullstellen von $\operatorname{Sin} ar$ liegen bei: $r = \frac{1}{a} n\pi i$, daher folgt:

$$z = \frac{1}{a}(-1)^n e^{-ht} \sum \operatorname{Sin} \frac{n\pi i x}{a}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{a^2}kt} \int_0^a e^{\frac{n\pi i}{a}(a-\nu)} \bar{f}(\nu)\, d\nu$$

$$= \frac{1}{a} e^{-ht} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sin \frac{n\pi x}{a}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{a^2}kt} \int_0^a \sin \frac{n\pi\nu}{a} \bar{f}(\nu)\, d\nu.$$

Wir erhalten also die Fouriersche sin-Reihe.

b) $$z\Big|^0 = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|^a = 0, \quad \text{also} \quad f_0(r) = 1; \quad f_1(r) = 1 \cdot r,$$

(2) gibt: $$z = \sum \operatorname{Res} \frac{e^{rx} - e^{-rx}}{e^{ar} + e^{-ar}}\, e^{(kr^2-h)t} \int_0^a e^{r(a-\nu)} \bar{f}(\nu)\, d\nu$$

$$= \sum \operatorname{Res} \frac{\operatorname{Sin} rx}{\operatorname{Cof} ar}\, e^{(kr^2-h)t} \int_0^a e^{r(a-\nu)} \bar{f}(\nu)\, d\nu.$$

Nun liegen die Nullstellen von $\operatorname{Cof} ar$ an den Punkten $r = \frac{1}{2a}(2n+1)\pi i$; gleichzeitig wird an diesen Stellen $\operatorname{Sin} ar = i(-1)^n$, so daß

$$z = \frac{1}{a} e^{-ht} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{a}\, e^{-k\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4a^2}t} \int_0^a \sin \frac{(2n+1)\pi\nu}{2a} \bar{f}(\nu)\, d\nu;$$

c) $$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|^0 = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|^a = 0, \quad \text{also} \quad f_0(r) = f_1(r) = r;$$

aus (2) folgt

$$z = \sum_r \operatorname{Res} \frac{\operatorname{Cof} rx}{\operatorname{Sin} ar}\, e^{(kr^2-h)t} \int_0^a e^{r(a-\nu)} \bar{f}(\nu)\, d\nu$$

$$= \frac{1}{a} e^{-ht} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{a^2}kt} \cos \frac{n\pi x}{a} \int_0^a \cos \frac{n\pi\nu}{a} \bar{f}(\nu)\, d\nu.$$

Es resultiert also die gewöhnliche Fouriersche cos-Reihe.

d) $$\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \gamma z\right)\Big|^0 = 0; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \Gamma z\right)\Big|^a = 0,$$

also $$f_0(r) = r - \gamma; \quad f_1(r) = r + \Gamma.$$

Da $n = 2\mu$ ist, $(\mu = +1)$, sieht man leicht, daß die Regularitätsbedingung der Randbedingungen, der zufolge in § 6 $[A]\cdot[B] \neq 0$ sein sollte, erfüllt ist. Es folgt aus (2):

$$z = \sum' \operatorname{Res} \frac{(\Gamma+r)\{(r+\gamma)e^{rx}+(r-\gamma)e^{-rx}\}e^{(kr^2-h)t}}{e^{ar}(r+\gamma)(r+\Gamma)-e^{-ar}(r-\gamma)(r-\Gamma)} \int_0^a e^{r(a-\nu)}\bar{f}(\nu)\,d\nu$$

$$= \sum' \operatorname{Res} \frac{\{r(r+\Gamma)\operatorname{Cof} rx+\gamma(r-\Gamma)\operatorname{Sin} rx\}}{(r^2+\gamma\Gamma)\operatorname{Sin} ar+r(\gamma+\Gamma)\operatorname{Cof} ar} e^{(kr^2-h)t} \int_0^a e^{r(a-\nu)}\bar{f}(\nu)\,d\nu$$

$$= \sum' \frac{r(r+\Gamma)\operatorname{Cof} rx+\gamma(r+\Gamma)\operatorname{Sin} rx}{r[2+a(\gamma+\Gamma)]\operatorname{Sin} ar+[a(r^2+\gamma\Gamma)+(\gamma+\Gamma)]\operatorname{Cof} ar} e^{(kr^2-h)t} \int_0^a e^{r(a-\nu)}\bar{f}(\nu)\,d\nu$$

Dabei ist die Summe zu erstrecken über sämtliche Wurzeln der Gleichung

$$(r^2+\gamma\Gamma)\operatorname{Sin} ar + r(\gamma+\Gamma)\operatorname{Cof} ar = 0.$$

2. Beispiel. Die Schwingungen einer Saite, deren Endpunkte bei $x = 0$ und $x = a$ liegen, genügen der Differentialgleichung[18])

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = h^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \tag{3}$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$\text{für } x = 0: \quad f_0(D_x)z = 0; \qquad x = a: \quad f_1(D_x)z = 0;$$

$$t = t_0: \quad z = \bar{f}_0(x); \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \bar{f}_1(x).$$

Hier ist $F(r, s) = r^2 - \frac{1}{h^2}s^2$, also $r_1 = +r; \quad r_2 = -r.$

$R_1, R_2, v, \mathfrak{F}(r)$ haben dieselben Werte wie im vorigen Beispiel. Ferner ist:

$$\frac{F(r,s)-F(r,\bar{f}(\nu))}{s-\bar{f}(\nu)} = -\frac{1}{h^2}\{s\cdot\bar{f}_0(\nu)+\bar{f}_1(\nu)\},$$

also lautet die Lösung von (3):

$$z = \sum'\sum' \operatorname*{Res}_{r,s} \frac{\{f_1(r)f_0(-r)e^{rx}-f_1(r)f_0(r)e^{-rx}\}e^{s(t-t_0)}}{(h^2r^2-s^2)\{f_0(r)f_1(-r)e^{-ar}-f_0(-r)f_1(r)e^{ar}\}} \int_0^a e^{r(a-\nu)}\{s\bar{f}_0(\nu)+\bar{f}_1(\nu)\}$$

Ist speziell für $t = t_0 = 0$: $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$, also $f_1(r) = 0$, so wird:

$$z = \sum' \operatorname*{Res}_r \frac{-f_0(-r)f_1(r)e^{rx}+f_0(r)f_1(r)e^{-rx}}{f_0(r)f_1(-r)e^{-ar}-f_0(-r)f_1(r)e^{ar}} \cdot \frac{e^{hrt}+e^{-hrt}}{2} \int_0^a e^{r(a-\nu)}\bar{f}_0(\nu)\,d\nu. \tag{4}$$

[18]) Vgl. Kneser, a. a. O. S. 36.

Daraus ergeben sich ähnliche Entwicklungen wie oben; es ist z. B. für die Randbedingungen: $z|^0 = z|^a = 0$, also $f_0(r) = f_1(r) = 1$:

$$z = \sum \operatorname{Res} \frac{\operatorname{Sin} rx}{\operatorname{Sin} ar} \operatorname{Cof} hrt \int_0^a e^{r(a-\nu)} \bar{f}_0(\nu)\, d\nu$$

$$= \frac{1}{a} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi h t}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi \nu}{a} f_0(\nu)\, d\nu .$$

3. Beispiel. Die Schwingungen einer schmalen Klinge, deren Achse sehr wenig von der Vertikalen, der x-Achse abweicht, und deren Enden in $x = 0$ und $x = a$ liegen, bestimmen sich aus der Gleichung[19])

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + k^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0 . \tag{5}$$

Die Rand- und Anfangsbedingungen mögen lauten:

$$\begin{aligned} \text{für } x = 0: &\quad f_0(D_x) z = 0;\ f_1(D_x) z = 0; \\ x = a: &\quad f_2(D_x) z = 0;\ f_3(D_x) z = 0; \\ t = t_0: &\quad z = \bar{f}_0(x);\ \frac{\partial z}{\partial t} = \bar{f}_1(x) . \end{aligned}$$

Hier ist $F(r,s) = k^2 r^4 + s^2$, also $r_1 = r$; $r_2 = -r$; $r_3 = ri$; $r_4 = -ri$. Die Nullstellen von $F(r,s)$ sind bestimmt durch $s = \pm k r^2 i$, und es ist

$$\frac{F(r,s) - F(r,\bar{f}(\nu))}{s - \bar{f}(\nu)} = s f_0(\nu) + \bar{f}_1(\nu);\quad \frac{\partial}{\partial s} F(r,s) = 2s .$$

Daher folgt als Lösung des Problems:

$$z = \sum \operatorname{Res} \frac{v}{\mathfrak{F}(r)} \left\{ \cos k r^2 t \int_0^a e^{-r\nu} \bar{f}_0(\nu)\, d\nu + \frac{1}{k r^2} \sin k r^2 t \int_0^a e^{-r\nu} \bar{f}_1(\nu)\, d\nu \right\} .$$

Es bestimmen sich die Größen $R_1 \ldots R_4$, $\mathfrak{F}(r)$ aus dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} {}_1 f_0(r) \quad &+ R_2 f_0(ri) \quad + R_3 f_0(-ri) \quad + R_4 f_0(-r) \quad = -f_0(r)\mathfrak{F}(r), \\ {}_1 f_1(r) \quad &+ R_2 f_1(ri) \quad + R_3 f_1(-ri) \quad + R_4 f_1(-r) \quad = -f_1(r)\mathfrak{F}(r), \\ {}_1 e^{ar} f_2(r) &+ R_2 e^{ari} f_2(ri) + R_3 e^{-ari} f_2(-ri) + R_4 e^{-ar} f_2(-r) = 0, \\ {}_1 e^{ar} f_3(r) &+ R_2 e^{ari} f_3(ri) + R_3 e^{-ari} f_3(-ri) + R_4 e^{-ar} f_3(-r) = 0 . \end{aligned}$$

Ist etwa speziell

$$z|^0 = z|^a = 0;\quad \frac{\partial z}{\partial x}\Big|^0 = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|^a = 0,$$

---

[19]) Ebenda S. 44; Cauchy, a. a. O. S. 45.

so findet man durch eine längere Rechnung:

$$\frac{v}{\mathfrak{F}(r)} = \frac{(1-e^{-ar}\cos ar)(e^{rx}-\cos rx-\sin rx)-e^{ar}\sin ar\,(e^{-rx}-\cos rx+\sin rx)}{(e^{ar}+e^{-ar})\cos ar-2}.$$

Ist weiter $\bar{f}_1(x)=0$, so ergibt sich die Lösung:

$$(6)\qquad z=\frac{4}{a}\sum \cos kr^2t$$

$$\frac{(1-e^{-ar}\cos ar)(e^{rx}-\cos rx-\sin rx)-e^{ar}\sin ar\,(e^{-rx}-\cos rx+\sin rx)}{(e^{ar}-e^{-ar})\cos ar-(e^{ar}+e^{-ar})\sin ar}\int_0^a e^{-rv}\bar{f}_0(v)\,dv$$

wobei sich die Summe über alle positiv reellen Wurzeln der Gleichung

$$\mathfrak{Cof}\,ar\cdot\cos ar=1$$

erstreckt. Ebenso findet man für die Randbedingungen

$$z\Big|^0=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|^0=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|^a=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\Big|^a=0$$

die Lösung

$$z=-\frac{4}{a}\sum \cos kr^2t$$

$$\frac{(1-e^{-ar}\cos ar)(e^{rx}-\cos rx-\sin rx)+e^{ar}\sin ar\,(e^{-rx}-\cos rx+\sin rx)}{(e^{ar}-e^{-ar})\cos ar-(e^{ar}+e^{-ar})\sin ar}\int_0^a e^{-rv}\bar{f}_0(v)\,dv$$

wobei sich die Summe über alle positiven reellen Wurzeln r der Gleichung

$$\mathfrak{Cof}\,ar\cos ar=-1$$

erstreckt [20]).

Wir sind damit am Schluß unserer Betrachtungen. Die wenigen Beispiele haben uns gezeigt, welche Fülle von Entwicklungen aus der Anwendung der allgemeinen Sätze auf spezielle Probleme fließt. Der weitaus größte Teil dieser Entwicklungen ist schon von Cauchy in seinen „Exercices“ gegeben worden, aber sie sind dort fast durchweg nur auf formalem Wege abgeleitet, und ein Konvergenzbeweis derselben fehlt. Dieser ist und das war das Ziel unserer Arbeit — in den von uns erhaltenen allgemeinen Sätzen enthalten, und damit sind alle jene Cauchyschen Entwicklungen als streng gültig nachgewiesen.

[20]) Wegen weiterer Beispiele vgl. die Dissertation des Verfassers.

(Eingegangen am 29. Juli 1923.)

Die Theorie der p-adischen bzw. $\mathfrak{P}$-adischen Zahlen und die gewöhnlichen algebraischen Zahlkörper. II.

Von

Michael Bauer in Budapest.

1. Es sei

$$f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n, \quad c_i \text{ rational-ganz}, \tag{1}$$

eine im gewöhnlichen Sinne irreduzible Gleichung mit der Wurzel ω. Es besteht ein Zusammenhang zwischen den Primidealfaktoren einer rationalen Primzahl p im Körper $K(\omega)$ und den p-adischen irreduziblen Faktoren der Gleichung (1). In einer gleichbetitelten Arbeit[1]) habe ich diese Henselsche Tatsache unmittelbar aus der klassischen Idealtheorie durch eine geeignete Adjunktion von Henselschen Grenzwerten hergeleitet. In dieser Arbeit werde ich denselben $\mathfrak{P}$-adischen *Körper* benützen. Die Anwendung der Gruppentheorie wird beseitigt und durch die Anwendung von grundlegenden Henselschen Sätzen über p-adische Polynome ersetzt.

2. Die Gesamtheit der Wurzeln von (1) ergibt einen Galoisschen Körper G. Es sei $\mathfrak{P}$ ein beliebiges Primideal der Primzahl p im Körper G. Der $\mathfrak{P}$-adische Körper bleibt, wie gesagt, der frühere, so daß die Wurzeln

$$\omega = \omega^{(1)}, \ \omega^{(2)}, \ \ldots, \ \omega^{(n)} \tag{2}$$

von (1) mit den gewöhnlichen Wurzeln als identisch betrachtet werden können. Es sei im p-adischen Körper

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_k(x) (p), \tag{3}$$

wo die Faktoren $f_l(x)$ verschieden und p-adisch irreduzibel sind. Die Wurzeln der irreduziblen Faktoren[2]) seien folgendermaßen bezeichnet:

$$\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(i_1)}; \ \omega^{(i_1+1)}, \ldots, \omega^{(i_1+i_2)}; \ldots; \ \omega^{(i_1+i_2+\ldots+i_{k-1}+1)}, \ldots, \omega^{(i_1+i_2+\ldots+i_k)}.$$

---

[1]) Mathematische Zeitschrift **14** (1922), S. 244—249.

[2]) Wie sich aus dem Texte ergibt, sind dieselben von $\mathfrak{P}$ abhängig.

Da die p-adischen Zahlen einen Körper bilden, ist nach einem Satze von Hensel das p-adische Polynom $g(x)$ durch die Kongruenzen

$$g(x) \equiv g_l(x) \pmod{f_l(x)} \qquad (l = 1, 2, \ldots, k)$$

$$g_l(x) = \begin{cases} 1, & l \neq h \\ g_h(x), & l = h, \ g_h(x) \text{ beliebig}, \end{cases}$$

nach dem Modul $f(x)$ bestimmt. Infolgedessen existieren gewisse konjugierte ganze Zahlen $\Omega_r^{(j)}$ der Körper $K(\omega^{(j)})$, welche die Kongruenzen

$$\Omega_r^{(j)} \equiv \delta_{jr} \pmod{\mathfrak{P}}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, k)$$

$$\delta_{jr} = \begin{cases} 1, \text{ wenn } j \neq i_1 + \ldots + i_{r-1} + 1, \ldots, i_1 + i_2 + \ldots + i_r, \\ 0, \text{ wenn } j \text{ gleich einer der obigen Zahlen ist,} \end{cases} \tag{4}$$

erfüllen[3]). Ist daher $\mathfrak{p}_1$ das Primideal des Körpers $K(\omega)$, welches ein Vielfaches von $\mathfrak{P}$ bildet, so sind seine Konjugierten in den Körpern

$$K(\omega^{(i_1+1)}), \ldots, K(\omega^{(i_1+i_2+\ldots+i_k)}) \tag{5}$$

nicht durch $\mathfrak{P}$ teilbar. Es sind aber in den Körpern (5) Ideale vorhanden, welche ein Vielfaches von $\mathfrak{P}$ bilden. Diese Primideale besitzen im Körper $K(\omega)$ nach (4) solche Konjugierte, welche von $\mathfrak{p}_1$ verschieden sind. Betrachten wir diejenigen Primideale der Körper

$$K(\omega^{(1)}), \ K(\omega^{(i_1+1)}), \ \ldots, \ K(\omega^{(i_1+i_2+\ldots+i_{k-1}+1)}), \tag{6}$$

welche ein Vielfaches von $\mathfrak{P}$ bilden. Werden die Konjugierten derselben im Körper $K(\omega)$ durch

$$\mathfrak{p}_1, \ \mathfrak{p}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{p}_k \tag{6*}$$

bezeichnet, so bilden dieselben voneinander verschiedene Primteiler von p, infolgedessen werden

$$p = \mathfrak{p}_1^{g_1} \mathfrak{p}_2^{g_2} \ldots \mathfrak{p}_k^{g_k} \mathfrak{q}, \qquad (\mathfrak{p}_r, \mathfrak{q}) = 1 \tag{7}$$

ausfallen.

3. Wir werden beweisen, daß $\mathfrak{q} \sim 1$ ist und der Grad von $\mathfrak{p}_r$ gleich f_r ausfällt, wo $i_r = f_r g_r$ ist.

Man kann nämlich in den Körpern, welche aus (6) durch die Adjunktion von $\mathfrak{P}$ entstehen, die Anzahl der (mod p) inkongruenten ganzen Größen auf zweierlei Weise bestimmen. Der Grad und die Multiplizität des in Betracht kommenden Primideals im Körper $K(\omega^{(i_1+\ldots+i_{r-1}+1)})$ sind offenbar gleich der analogen Größen des Primideals $\mathfrak{p}_r$; also ist die gesuchte

[3]) Ist nämlich $G(x)$ ein geeignetes Näherungs-Polynom von $g(x)$, dann genügen die Zahlen $G(\omega^{(j)})$ einer Gleichung mit rationalen Koeffizienten, deren Nenner relativ prim gegen p ist und der höchste Koeffizient gleich Eins ausfällt. Vgl. auch die Fußnote [4]).

Anzahl gleich $f_r g_r$, wie es sich aus der sog. additiven Darstellung ergibt[4]). Andererseits bekommen wir aus der Existenz eines Fundamentalsystems der ganzen Größen eines Körpers, welcher durch eine Wurzel einer p-adischen irreduziblen Gleichung entsteht, für die gesuchte Anzahl i_r. Infolgedessen ist $i_r = f_r g_r$ und aus

$$(7^*) \qquad n = f_1 g_1 + f_2 g_2 + \ldots + f_k g_k$$

folgt $\mathfrak{q} \sim 1$, was zu beweisen war.

[4]) Man kann sich beim Beweise mit der Adjunktion des Primideals begnügen, welches ein Vielfaches von $\mathfrak{P}$ bildet und im betreffenden Körper (6) vorhanden ist. Für die Ausführung vgl. meine Arbeit „Über die Erweiterung eines alg. Zahlkörpers usw." (Acta Litt. ac Scient. Regiae Univ. Hungaricae Francisco-Josephinae **1** (1923), S. 74—79).

(Eingegangen am 21. August 1923.)

Über die Wurzeln der Zetafunktion.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Einleitung.

Herr de la Vallée Poussin hatte 1899, unter Benutzung der Riemannschen Funktionalgleichung und der Hadamardschen Theorie, bewiesen:

Es gibt ein $a > 0$ *und ein* $\tau > 1$ *mit*

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \textit{für} \quad \sigma > 1 - \frac{1}{a \log t} \qquad (t > \tau).$$

Erst nachdem Herr Hecke für die Dedekindsche Zetafunktion $\zeta_\varkappa(s)$ eines algebraischen Körpers n-ten Grades seine Funktionalgleichung entdeckt hatte, konnte ich (1918)

$$\zeta_\varkappa(s) \neq 0 \quad \text{für} \quad \sigma > 1 - \frac{1}{a n \log t} \qquad (t > \tau(\varkappa))$$

beweisen und damit meinen Primidealsatz (1903) zu

$$\pi_\varkappa(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} = O\left(x e^{-\frac{1}{b\sqrt{n}}\sqrt{\log x}}\right)$$

(b positive absolute Konstante) verschärfen.

All dies geht aber doch ganz direkt, ohne daß man die Nähe der Geraden $\sigma = 1$ im ganzen Verlaufe der Untersuchung zu verlassen braucht. So entsteht ein völlig unerwarteter, einfacher und allgemeiner Satz über Dirichletsche Reihen, bei denen nicht einmal die Existenz der analytischen Funktion in der ganzen Ebene, geschweige denn Funktionalgleichung und endliches Geschlecht des Produktes mit $s = 1$ gefordert wird.

§ 1 enthält einen Hilfssatz. § 2 jenen Hauptsatz, § 3 einen Spezialfall, § 4 die oben angedeutete Anwendung auf ζ und $\zeta_\varkappa$, § 5 und § 6 weitere Anwendungen auf ζ. § 7 benutzt die Beweismethode des § 2, um

für die Dirichletschen L-Funktionen, die durch einen Charakter modulo k bestimmt sind,

$$L(s, \chi) \neq 0 \quad \text{für} \quad \sigma > 1 - \frac{1}{a \log t} \qquad (t > \tau(k))$$

und damit meinen Satz (1909) für die Anzahl $\pi(x; k, l)$ der Primzahlen $\leqq x$ in der arithmetischen Progression $p \equiv l \pmod{k}$ (wo $(k, l) = 1$ ist)

$$\pi(x; k, l) - \frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{du}{\log u} = O\left(x e^{-\frac{1}{b}\sqrt{\log x}}\right)$$

(b positive absolute Konstante) ohne alle tieferen Hilfsmittel zu beweisen.

§ 1.

Hilfssatz. *Es sei* $r > 0$, $f(s)$ *für* $|s - s_0| \leqq r$ *regulär*, $M > 0$,

$$\left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| < e^M,$$

$f(s) \neq 0$ *im Halbkreis* $|s - s_0| \leqq r$, $\Re(s) > \Re(s_0)$.

1. *Dann ist*

$$-\Re \frac{f'}{f}(s_0) < \frac{4M}{r}.$$

2. *Gibt es eine Wurzel* ϱ *zwischen* $s_0 - \frac{r}{2}$ *und* s_0, *so ist*

$$-\Re \frac{f'}{f}(s_0) < \frac{4M}{r} - \frac{1}{s_0 - \varrho}.$$

Beweis. ϱ durchlaufe alle etwaigen Wurzeln in $|s - s_0| \leqq \frac{r}{2}$. Dann ist

$$g(s) = \frac{f(s)}{\prod_{\varrho}(s - \varrho)}$$

in $|s - s_0| \leqq r$ regulär. Auf $|s - s_0| = r$ ist, wegen $|s - \varrho| \geqq \frac{r}{2} \geqq |s_0 - \varrho|$,

$$\left|\frac{g(s)}{g(s_0)}\right| = \left|\frac{f(s)}{f(s_0)} \prod_{\varrho} \frac{s_0 - \varrho}{s - \varrho}\right| \leqq \left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| < e^M.$$

Für $|s - s_0| \leqq \frac{r}{2}$ ist also

$$\left|\frac{g(s)}{g(s_0)}\right| < e^M,$$

ferner, weil $g(s)$ dort nicht verschwindet,

$$\frac{g(s)}{g(s_0)} = e^{h(s)}, \qquad h(s_0) = 0, \qquad h(s) \text{ regulär}, \qquad \Re h(s) < M.$$

Hieraus folgt für $|s - s_0| \leqq \frac{r}{2}$

$$\left|\frac{h(s)}{2M - h(s)}\right| < 1;$$

daher ist

$$\frac{|h'(s_0)|}{2M} < \frac{2}{r},$$

$$\left|\frac{f'}{f}(s_0) - \sum_{\varrho}\frac{1}{s_0-\varrho}\right| = \left|\frac{g'}{g}(s_0)\right| = |h'(s_0)| < \frac{4M}{r},$$

$$-\Re\frac{f'}{f}(s_0) < \frac{4M}{r} - \sum_{\varrho}\Re\frac{1}{s_0-\varrho};$$

wegen $\Re(s_0-\varrho) \geqq 0$, $\Re\frac{1}{s_0-\varrho} \geqq 0$ sind hierin beide Behauptungen enthalten.

§ 2.

Hauptsatz. 1. *Für* $\sigma > 1$ *sei*

$$f(s) = e^{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}}, \qquad a_n \geqq 0.$$

2. $f(s)$ *habe in* $s=1$ *einen Pol erster Ordnung.*

3. *Es sei* $\eta(t)$ *für* $t \geqq \tau$ *positiv und monoton nicht zunehmend;* $Q(t)$ *sei für* $t \geqq \tau$ *positiv und monoton ins Unendliche wachsend; ferner sei*

$$\frac{1}{\eta(t)} = O(e^{Q(t)}). \tag{1}$$

Für $t \geqq \tau$, $\sigma \geqq 1-\eta(t)$ *sei* $f(s)$ *regulär und*

$$|f(s)| < e^{Q(t)}. \tag{2}$$

Dann ist, wenn unendlich viele $\varrho = \beta + \gamma i$ *von* $f(s)$ *im Gebiete* $t \geqq \tau$, $\sigma \geqq 1-\eta(t)$ *vorhanden sind,*

$$\liminf_{\gamma=\infty}(1-\beta)\frac{Q(3\gamma)}{\eta(3\gamma)} \geqq \frac{1}{900}. \tag{3}$$

Beweis. Ich setze für $\gamma \geqq \frac{\tau}{3}$

$$\sigma_0 = 1 + \frac{\eta(3\gamma)}{100\,Q(3\gamma)}.$$

Ich darf annehmen, daß es unendlich viele ϱ mit $\beta > \sigma_0 - \frac{1}{2}\eta(3\gamma)$ gibt, und brauche (3) nur für sie zu beweisen; denn wenn zuletzt $\beta \leqq \sigma_0 - \frac{1}{2}\eta(3\gamma)$, also $1-\beta \geqq \frac{1}{2}\eta(3\gamma) - \frac{\eta(3\gamma)}{100\,Q(3\gamma)}$ ist, so ergibt sich sofort

$$\liminf_{\gamma=\infty}(1-\beta)\frac{Q(3\gamma)}{\eta(3\gamma)} = \infty.$$

Für $s_0 = \sigma_0 + \gamma i$ und $s_0 = \sigma_0 + 2\gamma i$ gehört bei großem γ der Kreis $|s - s_0| \leqq r = \eta(3\gamma)$ dem Gebiet $t \geqq \tau$, $\sigma \geqq 1 - \eta(t)$ an; denn für großes γ ist

$$t \geqq \gamma - \eta(3\gamma) \geqq \tau, \quad \sigma > 1 - \eta(3\gamma) \geqq 1 - \eta(2\gamma + \eta(3\gamma)) \geqq 1 - \eta(t).$$

Für großes γ ist, wenn A das Residuum in $s = 1$ bezeichnet,

$$\left|\frac{1}{f(s_0)}\right| \leqq e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma_0}}} = f(\sigma_0) < \frac{2A}{\sigma_0 - 1} = 200\, A \frac{Q(3\gamma)}{\eta(3\gamma)},$$

also in $|s - s_0| \leqq r$ wegen (2) und (1)

$$\left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| < 200\, A \frac{Q(3\gamma)}{\eta(3\gamma)} e^{Q(2\gamma + \eta(3\gamma))} < e^{2{,}1\, Q(3\gamma)}.$$

Der Hilfssatz, mit $M = 2{,}1\, Q(3\gamma)$, ergibt also für großes γ

$$-\Re \frac{f'}{f}(\sigma_0 + 2\gamma i) < \frac{8{,}4\, Q(3\gamma)}{\eta(3\gamma)},$$

$$-\Re \frac{f'}{f}(\sigma_0 + \gamma i) < \frac{8{,}4\, Q(3\gamma)}{\eta(3\gamma)} - \frac{1}{\sigma_0 - \beta}.$$

Nun ist stets

$$3 + 4\cos\psi + \cos 2\psi = 2(1 + \cos\psi)^2 \geqq 0;$$

daher ist

$$0 \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \log n}{n^{\sigma_0}} (3 + 4\cos(\gamma \log n) + \cos(2\gamma \log n))$$

$$= -3\frac{f'}{f}(\sigma_0) - 4\,\Re \frac{f'}{f}(\sigma_0 + \gamma i) - \Re \frac{f'}{f}(\sigma_0 + 2\gamma i),$$

folglich für großes γ

$$0 < \frac{3{,}18}{\sigma_0 - 1} + \frac{42\, Q(3\gamma)}{\eta(3\gamma)} - \frac{4}{\sigma_0 - \beta} = \frac{360\, Q(3\gamma)}{\eta(3\gamma)} - \frac{4}{\sigma_0 - \beta},$$

$$1 - \beta + \frac{\eta(3\gamma)}{100\, Q(3\gamma)} = \sigma_0 - \beta > \frac{\eta(3\gamma)}{90\, Q(3\gamma)},$$

$$1 - \beta > \frac{\eta(3\gamma)}{Q(3\gamma)} \left(\frac{1}{90} - \frac{1}{100}\right) = \frac{\eta(3\gamma)}{900\, Q(3\gamma)}.$$

§ 3.

Spezialfall ($\eta > 0$ konstant, $Q(t) = \nu \log t$ mit $\nu > 0$):

1. *Für $\sigma > 1$ sei*

$$f(s) = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}}, \quad a_n \geqq 0.$$

2. *$f(s)$ habe in $s = 1$ einen Pol erster Ordnung.*

3. *Es sei* $\eta > 0$, $\tau > 1$, $\nu > 0$. *Für* $t \geqq \tau$, $\sigma \geqq 1 - \eta$ *sei* $f(s)$ *regulär und*

$$|f(s)| < t^{\nu}. \tag{4}$$

Dann ist, wenn unendlich viele Wurzeln im Gebiete $t \geqq \tau$, $\sigma \geqq 1 - \eta$ *vorhanden sind,*

$$\liminf_{\gamma=\infty} (1-\beta)\log\gamma \geqq \frac{\eta}{900\,\nu}. \tag{5}$$

§ 4.

Dieser Spezialfall erledigt $\zeta(s)$ und $\zeta_{\varkappa}(s)$; denn nach dem alten Weberschen Satz (1896)

$$\sum_{N\,n \leqq x} 1 = Ax + O\left(x^{1-\frac{1}{n}}\right)$$

ist $\zeta_{\varkappa}(s) - A\zeta(s)$ eine für $\sigma > 1 - \frac{1}{n}$ konvergente Dirichletsche Reihe. Für jedes positive $\eta < \frac{1}{n}$ ist also in $\sigma \geqq 1 - \eta$

$$\zeta_{\varkappa}(s) = o(t),$$

so daß bei passendem τ die Zahl ν in (4) gleich 1 angenommen werden kann und beim Grenzübergang $\eta \to \frac{1}{n}$ aus (5) herauskommt:

$$\liminf_{\gamma=\infty} (1-\beta)\log\gamma \geqq \frac{1}{900\,n}.$$

§ 5.

Aus dem Hauptsatz mit $\tau = e^{e^2}$, $\eta(t) = \frac{(\log\log t)^2}{\log t}$, $Q(t) = B\log\log t$ $(B > 1)$ folgt unter Benutzung des Hardy-Littlewoodschen Satzes[1])

$$|\zeta(s)| < \log^B t \quad \text{für} \quad t \geqq 3, \qquad \sigma \geqq 1 - \frac{(\log\log t)^2}{\log t} \tag{6}$$

der zuerst von Herrn Littlewood aus (6) nur durch eine längere Schlußkette hergeleitete Satz

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{für} \quad t \geqq \tau, \qquad \sigma \geqq 1 - \frac{\log\log t}{B_1 \log t} \qquad (B_1 > 0)$$

[1]) Der noch nicht veröffentlichte Beweis hat mir vorgelegen. In meiner nachfolgenden Arbeit *Über die ζ-Funktion und die L-Funktionen* werde ich u. a. für (6) und (7) neue Beweise publizieren, die von der Riemannschen Funktionalgleichung und der Fortsetzung von $\zeta(s)$ in die ganze Ebene keinen Gebrauch machen. Die Verf. wenden sogar die von ihnen entdeckte „approximate functional equation" an.

und damit sein Satz

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} = O\left(x e^{-\frac{1}{B_2}\sqrt{\log x \log\log x}}\right) \qquad (B_2 > 0).$$

In der Tat ergibt mein Hauptsatz

$$\liminf_{\gamma=\infty} (1-\beta)\frac{\log\gamma}{\log\log\gamma} \geqq \frac{1}{900\,B}.$$

§ 6.

Der schwächere, auch zuerst von Herrn Littlewood für $\zeta(s)$ bewiesene Satz

$$(1-\beta)\log\gamma \to \infty$$

und damit für *jedes* $\alpha > 0$

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} = O\left(x e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right)$$

kommt aus dem Satz meines § 3 schon heraus, wenn nur der Hardy-Littlewoodsche Satz[1]) über die Lindelöfsche μ-Funktion

$$\mu(1-\eta) = o(\eta) \quad \text{bei} \quad \eta \to 0 \tag{7}$$

benutzt wird. Denn für jedes positive $\eta < 1$ kann $\nu = \mu(1-\eta) + \eta^2$ eingesetzt werden, und es ist nach (7) bei $\eta \to 0$

$$\frac{\eta}{900\,(\mu(1-\eta)+\eta^2)} \to \infty.$$

§ 7.

Satz (Landau, 1909): *$\chi(n)$ sei ein Charakter* mod k, *$L(s,\chi)$ die für $\sigma > 1$ durch*

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = e^{\sum_{p,m} \frac{\chi(p^m)}{m\,p^{ms}}}$$

definierte analytische Funktion. Dann ist bei passendem $\tau = \tau(k)$

$$L(s,\chi) \neq 0 \quad \text{für} \quad t > \tau, \quad \sigma > 1 - \frac{1}{1000\log t}.$$

Beweis. Bekanntlich sind $L(s,\chi)$ und $L(s,\chi^2)$ für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ exkl. $s=1$ regulär, und es ist ferner

$$|L(s,\chi)| < t, \qquad |L(s,\chi^2)| < t \quad \text{für} \quad t \geqq \tau_1(k) > 3, \quad \sigma \geqq \frac{1}{2}.$$

Ich setze für $\gamma > 3$

$$\sigma_0 = 1 + \frac{1}{200\log\gamma},$$

darf annehmen, daß es unendlich viele Wurzeln von $L(s, \chi)$ mit $\beta > \sigma_0 - \frac{1}{4}$ gibt und brauche nur bei ihnen

$$(1-\beta)\log\gamma \geqq \frac{1}{1000} \text{ für } \gamma > \tau$$

zu beweisen.

Für $\gamma \geqq \tau_1 + \frac{1}{2}$, $s_0 = \sigma_0 + \gamma i$ und $s_0 = \sigma_0 + 2\gamma i$ gehört der Kreis $|s - s_0| \leqq \frac{1}{2}$ dem Gebiet $\sigma \geqq \frac{1}{2}$, $t \geqq \tau_1$ an. Aus

$$\left|\frac{1}{L(s_0, \chi)}\right| \text{ und } \left|\frac{1}{L(s_0, \chi^2)}\right| \leqq \zeta(\sigma_0) < \frac{2}{\sigma_0 - 1} = 400\log\gamma$$

folgt im Kreis $|s - s_0| \leqq \frac{1}{2}$ für großes γ

$$\left|\frac{L(s, \chi)}{L(s_0, \chi)}\right| \text{ und } \left|\frac{L(s, \chi^2)}{L(s_0, \chi^2)}\right| < 400\log\gamma \cdot \left(2\gamma + \frac{1}{2}\right) < e^{1,1\log\gamma}.$$

Der Hilfssatz, mit $M = 1{,}1\log\gamma$, ergibt also für großes γ

$$-\Re\frac{L'}{L}(\sigma_0 + 2\gamma i, \chi^2) < 8{,}8\log\gamma,$$

$$-\Re\frac{L'}{L}(\sigma_0 + \gamma i, \chi) < 8{,}8\log\gamma - \frac{1}{\sigma_0 - \beta}.$$

Aus

$$\chi(p^m) = e^{\Phi(p,m)i} \quad (0 \leqq \Phi < 2\pi) \text{ für } p \nmid k$$

folgt

$$0 \leqq \sum_{\substack{p,m \\ p \nmid k}}{}' \frac{\log p}{p^{m\sigma_0}} \left(3 + 4\cos(\Phi(p,m) - \gamma m \log p) + \cos(2\Phi(p,m) - 2\gamma m \log p)\right)$$

$$= -3\frac{L'}{L}(\sigma_0, \chi_0) - 4\Re\frac{L'}{L}(\sigma_0 + \gamma i, \chi) - \Re\frac{L'}{L}(\sigma_0 + 2\gamma i, \chi^2),$$

also für großes γ

$$0 < \frac{3{,}1}{\sigma_0 - 1} + 44\log\gamma - \frac{4}{\sigma_0 - \beta} = 664\log\gamma - \frac{4}{\sigma_0 - \beta},$$

$$1 - \beta + \frac{1}{200\log\gamma} > \frac{1}{166\log\gamma},$$

$$1 - \beta > \left(\frac{1}{166} - \frac{1}{200}\right)\frac{1}{\log\gamma} > \frac{1}{1000\log\gamma}.$$

Eibsee, den 28. August 1923.

(Eingegangen am 30. August 1923.)

Über die ζ-Funktion und die L-Funktionen.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Einleitung.

Die Herren Hardy und Littlewood haben folgende beiden Sätze bewiesen, welche einen außerordentlichen Fortschritt darstellen:

1. *Für jedes ganze* $q \geqq 2$ *ist,* $Q = 2^{q-1}$ *gesetzt, bei jedem* $\varepsilon > 0$

$$\zeta\left(1 - \frac{1}{Q} + ti\right) = O\left(t^{\frac{1}{(q+1)Q} + \varepsilon}\right), \tag{1}$$

also das Lindelöfsche

$$\mu\left(1 - \frac{1}{Q}\right) \leqq \frac{1}{(q+1)Q}. \tag{2}$$

Bekannt war vordem nur

$$\mu\left(1 - \frac{1}{Q}\right) \leqq \frac{1}{2Q}.$$

2. *Für* $\frac{63}{64} \leqq \sigma < 1$ *ist gleichmäßig*

$$\zeta(s) = O\left(t^{A(1-\sigma)\log\frac{1}{1-\sigma}} \frac{\log t}{\log\log t}\right), \tag{3}$$

wo A (ebenso wie $A_1, A_2, \ldots$ nachher) *eine absolute positive Konstante bezeichnet*[1]).

Aus (3) schloß Herr Littlewood durch eine längere und ich[2]) alsdann durch eine kürzere Schlußkette

$$\zeta(s) \neq 0 \text{ für } t \geqq 3, \quad \sigma \geqq 1 - \frac{\log\log t}{A_2 \log t}$$

und damit nach bekanntem Paradigma

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} = O\left(x e^{-\frac{1}{A_3}\sqrt{\log x \log\log x}}\right).$$

[1]) Für $\frac{1}{2} \leqq \sigma < \frac{63}{64}$ ist (3) trivial wegen $\zeta(s) = O(t^{A_1})$.

[2]) In meiner vorangehenden Arbeit *Über die Wurzeln der Zetafunktion.*

Die noch unveröffentlichten Beweise von (1) und (3) wurden mir von den Verf. freundlichst mitgeteilt. Nachdem ich eine Reihe von Vereinfachungen und eine Verschärfung von (1) (jedoch nicht von (2)) gefunden hatte, machte mich mein Assistent, Herr Grandjot, bei der Ausarbeitung des Ganzen (für meine Vorlesung Zahlentheorie, IV. Teil, im Sommersemester 1923) darauf aufmerksam, daß die Hardy-Littlewoodsche „approximate functional equation" vermieden werden kann; schließlich gelang es mir, sogar die Riemannsche Funktionalgleichung, selbst die Fortsetzbarkeit von $\zeta(s)$ in die ganze Ebene zu vermeiden.

Ich kann ohne Verlängerung der Beweise für alle Dirichletschen L-Funktionen modulo k alsbald dasselbe erreichen, nämlich beweisen:

$$L\left(1-\frac{1}{Q}+ti,\chi\right)=O\left(t^{\frac{1}{(q+1)Q}}\log^{1+\frac{1}{Q}}t\right), \tag{4}$$

also (2) für die zugehörige μ-Funktion, und bei jedem L gleichmäßig in σ

$$L(s,\chi)=O\left(t^{\log^{\frac{1}{1-\sigma}}4(1-\sigma)}\frac{\log t}{\log\log t}\right) \tag{5}$$

für $\frac{63}{64}\leqq\sigma<1$.

Im § 4 werde ich aus (5) nach der Methode meiner genannten Abhandlung beweisen:

$$L(s,\chi)\neq 0 \quad \text{für} \quad t\geqq\tau(k), \quad \sigma\geqq 1-\frac{\log\log t}{A_4\log t}, \tag{6}$$

im § 5 aus (6) für die Anzahl $\pi(x;k,l)$ der Primzahlen $p\equiv l\pmod k$, welche $\leqq x$ sind, falls $(k,l)=1$ ist,

$$\pi(x;k,l)-\frac{1}{\varphi(k)}\int_2^x\frac{du}{\log u}=O\left(xe^{-\frac{1}{A_5}\sqrt{\log x\log\log x}}\right). \tag{7}$$

In den §§ 1—3 beweise ich (4) und (5). Offenbar ist es hinreichend, für jedes feste w der Strecke $0<w\leqq 1$, wenn $\zeta(s,w)$ die für $\sigma>1$ durch

$$\zeta(s,w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+w)^s}$$

definierte analytische Funktion ist,

$$\zeta\left(1-\frac{1}{Q}+ti,w\right)=O\left(t^{\frac{1}{(q+1)Q}}\log^{1+\frac{1}{Q}}t\right) \tag{8}$$

und gleichmäßig in σ

$$\zeta(s,w)=O\left(t^{\log^{\frac{1}{1-\sigma}}4(1-\sigma)}\frac{\log t}{\log\log t}\right) \quad \text{für} \quad \frac{63}{64}\leqq\sigma<1 \tag{9}$$

zu beweisen. Denn der Übergang von (8) zu (4) und von (9) zu (5) geschieht unmittelbar auf Grund der für $\sigma > 1$ bestehenden Identität

$$L(s,\chi) = \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\chi(a)}{a^s} = \sum_{a=1}^{k} \chi(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+kn)^s} = \frac{1}{k^s} \sum_{a=1}^{k} \chi(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n+\frac{a}{k}\right)^s}$$
$$= \frac{1}{k^s} \sum_{a=1}^{k} \chi(a)\, \zeta\left(s, \frac{a}{k}\right).$$

Als interessantesten Spezialfall von (4) hebe ich

$$L\left(\frac{1}{2}+ti, \chi\right) = O\left(t^{\frac{1}{6}} \log^{\frac{3}{2}} t\right)$$

hervor (auch für ζ neu); ferner bemerke ich, daß ich für die Anwendung in den §§ 4—5 von (5) nur den Spezialfall brauche:

Für $1 - \frac{(\log\log t)^2}{\log t} \leqq \sigma < 1$ ist gleichmäßig

$$L(s,\chi) = O\left(e^{\log t \frac{4(\log\log t)^2}{\log t} \frac{1}{\log\log t - 2\log\log\log t} \frac{\log t}{\log\log t}}\right) = O(\log^{A_6} t),$$

für $\sigma \geqq 1 - \frac{(\log\log t)^2}{\log t}$ somit gleichmäßig

$$L(s,\chi) = o(\log^{A_7} t). \tag{10}$$

§ 1.

Hilfssätze über $\sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^s}$.

Es sei dauernd k ganz und $\geqq 1$, $K = 2^{k-1}$, $0 < w \leqq 1$.

Hilfssatz 1. *Es seien a und $b \geqq a$ ganz,*

$$0 \leqq \varepsilon_a \leqq \varepsilon_{a+1} \leqq \cdots \leqq \varepsilon_b,$$
$$\left|\sum_{r=c}^{b} \xi_r\right| \leqq L \quad \text{für} \quad c = a, a+1, \ldots, b.$$

Dann ist

$$\left|\sum_{r=a}^{b}{}' \varepsilon_r \xi_r\right| \leqq L\varepsilon_b.$$

Beweis. Wohlbekannt.

Hilfssatz 2. *$P(z) = 2\alpha z^k + \alpha_{k-1} z^{k-1} + \ldots + \alpha_1 z$ habe reelle Koeffizienten. Es sei*

$$U = \sum_{r}{}' e^{iP(r)},$$

wo r über $\mu \geqq 1$ konsekutive Zahlen läuft. Dann ist

$$|U|^K \leqq (2\mu)^{K-k} \sum_{L \leqq \mu-1} \left|\sum_{l=0}^{\mu-1-L} e^{2\alpha i k! H l}\right|, \tag{11}$$

wo

1. *im Falle* $k=1$ *das erste Summenzeichen wegbleibt,* $L=0$ *und* $H=1$ *ist,*

2. *im Falle* $k>1$ *die Zahlen* $L=\sum_{\nu=1}^{k-1}|h_\nu|$, $H=\prod_{\nu=1}^{k-1}h_\nu$ *sind und in der ersten Summe über* $h_1,\ldots,h_{k-1}$ *summiert wird.*

Beweis. 1. Für $k=1$ ist die Behauptung trivial.

2. Für $k>1$ steht der Beweis auf S. 225—226 meiner Abhandlung *Zum Waringschen Problem* in Bd. **12** (1922) dieser Zeitschrift.

Hilfssatz 3. *Ist überdies* $h\geqq 0$ *ganz, so ist*

$$\left|\sum_{r=0}^{\mu-1} r^h e^{iP(r)}\right|^K < 4\mu^h\left(\mu^{1-\frac{1}{K}}+\mu^{1-\frac{k}{K}}\sqrt[K]{\sum_{h_1,\ldots,h_{k-1}=1}^{\mu}\operatorname{Min}.\left(\mu,\frac{1}{\sin\alpha k!\,H}\right)}\right),$$

wo $\operatorname{Min}.(\mu,\frac{1}{0})$ *die Zahl* μ *bezeichnet und das Summenzeichen rechts im Falle* $k=1$ *wegbleibt.*

Beweis. In (11) ist, falls $\frac{\alpha k!\,H}{\pi}$ ganz ist,

$$\left|\sum_{l=0}^{\mu-1-L} e^{2\alpha i k!\,Hl}\right|\leqq\mu,$$

anderenfalls

$$(12)\qquad \left|\sum_{l=0}^{\mu-1-L} e^{2\alpha i k!\,Hl}\right| = \left|\frac{1-e^{2\alpha i k!\,H(\mu-L)}}{1-e^{2\alpha i k!\,H}}\right| \leqq \frac{2}{\left|1-e^{2\alpha i k!\,H}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\alpha k!\,H\right|}.$$

Wird $\xi_r=e^{iP(r)}$ gesetzt, so ist nach (11) und (12) für $0\leqq c\leqq\mu-1$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{r=c}^{\mu-1}\xi_r\right|^K &= \left|\sum_{r=c}^{\mu-1} e^{iP(r)}\right|^K \leqq (2(\mu-c))^{K-k}\sum_{L\leqq\mu-c-1}\operatorname{Min}.\left(\mu-c,\frac{1}{\left|\sin\alpha k!\,H\right|}\right)\\ &\leqq (2\mu)^{K-k}\sum_{L\leqq\mu-1}\operatorname{Min}.\left(\mu,\frac{1}{\left|\sin\alpha k!\,H\right|}\right)\\ &\leqq (2\mu)^{K-k}\left(\sum_{\substack{L\leqq\mu-1\\ H=0}}\mu+2^{k-1}\sum_{\substack{h_1+\ldots+h_{k-1}\leqq\mu-1\\ h_\nu>0}}\operatorname{Min}.\left(\mu,\frac{1}{\left|\sin\alpha k!\,H\right|}\right)\right)\\ &\leqq (2\mu)^{K-k}\left(\mu(k-1)(2\mu-1)^{k-2}+2^{k-1}\sum_{h_1,\ldots,h_{k-1}=1}^{\mu}\operatorname{Min}.\right)\\ &< k\,2^{K-2}\mu^{K-1}+2^{K-1}\mu^{K-k}\sum\operatorname{Min}. < 2^K 2^K\mu^{K-1}+4^K\mu^{K-k}\sum\\ &\left(4\mu^{1-\frac{1}{K}}+4\mu^{1-\frac{k}{K}}\sqrt[K]{\sum\operatorname{Min}.}\right)^K,\end{aligned}$$

$$\left|\sum_{r=c}^{\mu-1}\xi_r\right| < 4\left(\mu^{1-\frac{1}{K}}+\mu^{1-\frac{k}{K}}\sqrt[K]{\sum\operatorname{Min}.}\right)=R,$$

also, $\varepsilon_r = r^h$ gesetzt, nach Hilfssatz 1 wegen $\varepsilon_{\mu-1} \leqq \mu^h$

$$\left| \sum_{r=0}^{\mu-1} r^h e^{iP(r)} \right| = \left| \sum_{r=0}^{\mu-1} \varepsilon_r \xi_r \right| < \mu^h R.$$

Hilfssatz 4. *In*

$$(13)\quad (1+x)^{ti} e^{-ti\sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n} = e^{ti\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n} = \sum_{h=0}^{\infty} e_h(t)\, x^h \qquad (0 \leqq x < 1)$$

ist für $t > 1$

$$\sum_{h=0}^{\infty} |e_h(t)| \left(\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{k+1}}\right)^h < 2.$$

Beweis. Wird

$$e^{\frac{tx^{k+1}}{1-x}} = e^{t\sum_{n=k+1}^{\infty} x^n} = \sum_{h=0}^{\infty} f_h(t)\, x^h$$

gesetzt, so ist offenbar

$$|e_h(t)| \leqq f_h(t),$$

also

$$\sum_{h=0}^{\infty} |e_h(t)| \left(\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{k+1}}\right)^h \leqq \sum_{h=0}^{\infty} f_h(t) \left(\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{k+1}}\right)^h = e^{\frac{t\left(\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{k+1}}}} < e^{\frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{1-\frac{1}{2}}} = e^{\frac{1}{2^k}} < 2.$$

Hilfssatz 5. *Es sei*

$$t > 1, \quad \mu \text{ ganz und } > 0, \quad v > 0, \quad \frac{\mu}{v} \leqq \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{k+1}}.$$

Dann ist

$$\left| \sum_{r=0}^{\mu-1} \left(1 + \frac{r}{v}\right)^{ti} \right| < 8\left(\mu^{1-\frac{1}{K}} + \mu^{1-\frac{k}{K}} \sqrt[K]{\sum_{h_1, \ldots, h_{k-1}=1}^{\mu} \operatorname{Min.}\left(\mu, \frac{1}{\left|\sin \frac{t\,k!\,H}{2k\,v^k}\right|}\right)}\right).$$

Beweis. Es werde

$$P(z) = \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n-1} t}{n v^n} z^n$$

gesetzt. Nach Hilfssatz 3 ist für jedes ganze $h \geqq 0$

$$(14)\qquad \left| \sum_{r=0}^{\mu-1} r^h e^{iP(r)} \right| < \mu^h R,$$

wo

$$R = 4\left(\mu^{1-\frac{1}{K}} + \mu^{1-\frac{k}{K}} \sqrt[K]{\sum_{h_1, \ldots, h_{k-1}=1}^{\mu} \operatorname{Min.}\left(\mu, \frac{1}{\left|\sin \frac{t\,k!\,H}{2k\,v^k}\right|}\right)}\right)$$

von h frei ist. Nach (13) ist für $0 \leqq r \leqq \mu - 1$ wegen $0 \leqq \frac{r}{v} < \frac{\mu}{v} < 1$

$$\left(1+\frac{r}{v}\right)^{ti} = e^{ti\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{r}{v}\right)^n} \sum_{h=0}^{\infty} e_h(t)\left(\frac{r}{v}\right)^h = e^{iP(r)} \sum_{h=0}^{\infty} e_h(t)\frac{r^h}{v^h},$$

also

$$\sum_{r=0}^{\mu-1}\left(1+\frac{r}{v}\right)^{ti} = \sum_{h=0}^{\infty}\frac{e_h(t)}{v^h}\sum_{r=0}^{\mu-1} r^h e^{iP(r)}. \tag{15}$$

Aus (14) und (15) folgt wegen $\frac{\mu}{v} \leqq \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{k+1}}$ und Hilfssatz 4

$$\left|\sum_{r=0}^{\mu-1}\left(1+\frac{r}{v}\right)^{ti}\right| \leqq \sum_{h=0}^{\infty}\left|\frac{e_h(t)}{v^h}\right|\mu^h R \leqq R\sum_{h=0}^{\infty}|e_h(t)|\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{k+1}}\right)^h < 2R.$$

Hilfssatz 6. *Es seien N, N' ganz,*

$$N \leqq N' < 2N, \quad t > 3.$$

Dann ist bei jedem k

$$\left|\sum_{n=N}^{N'}(n+w)^{ti}\right| < 2^{17}\left(N^{1-\frac{1}{K}}t^{\frac{1}{(k+1)K}} + Nt^{-\frac{1}{(k+1)K}}\log^{\frac{k-1}{K}}N\right)\log^{\frac{1}{K}}t. \tag{16}$$

Beweis. Z bezeichne die rechte Seite von (16).

1. Es sei

$$N \leqq 4t^{\frac{1}{k+1}}.$$

Dann ist

$$\left|\sum_{n=N}^{N'}(n+w)^{ti}\right| \leqq \sum_{n=N}^{N'}1 = N'-N+1 \leqq N \leqq N^{1-\frac{1}{K}}t^{\frac{1}{(k+1)K}}4^{\frac{1}{K}}$$

$$< 4N^{1-\frac{1}{K}}t^{\frac{1}{(k+1)K}}\log^{\frac{1}{K}}t < Z.$$

2. Es sei

$$N > 4t^{\frac{1}{k+1}},$$

also $N > 4$. Es werde

$$\mu = \left[\frac{1}{2}Nt^{-\frac{1}{k+1}}\right], \qquad M = \left[\frac{N'-N}{\mu}\right]$$

gesetzt. Dann ist

$$\frac{1}{4}Nt^{-\frac{1}{k+1}} < \mu \leqq \frac{1}{2}Nt^{-\frac{1}{k+1}}, \tag{17}$$

$$M \leqq \frac{N'-N}{\mu} < \frac{N}{\mu} < 4t^{\frac{1}{k+1}}, \tag{18}$$

$$0 \leqq N' - N - M\mu < \mu. \tag{19}$$

2. 1. Es sei

$$M < 2.$$

Dann ist $N' \leqq N + 2\mu - 1$,

$$\left|\sum_{n=N}^{N'} (n+w)^{ti}\right| \leqq N' - N + 1 \leqq 2\mu \leqq Nt^{-\frac{1}{k+1}} \quad Nt^{-\frac{1}{(k+1)K}} \log^{\frac{k-1}{K}} N \log^{\frac{1}{K}} t \quad Z.$$

2. 2. Es sei

$$M \geqq 2.$$

Man setze

$$v_m = N + w + m\mu \quad \text{für} \quad 0 \leqq m \leqq M.$$

Dann ist

$$N < v_m \leqq v_M \leqq N + 1 + \frac{N' - N}{\mu}\mu = N' + 1 \leqq 2N, \tag{20}$$

also nach (17)

$$\frac{\mu}{v_m} < \frac{\mu}{N} \leqq \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{k+1}}, \tag{21}$$

$$\sum_{n=N}^{N'} (n+w)^{ti} = \sum_{m=1}^{M} \sum_{r=0}^{\mu-1} (v_{m-1} + r)^{ti} + \sum_{r=0}^{N'-N-M\mu} (v_M + r)^{ti},$$

folglich wegen (19) und (17)

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=N}^{N'} (n+w)^{ti}\right| &\leqq \sum_{m=1}^{M} \left|\sum_{r=0}^{\mu-1} (v_{m-1}+r)^{ti}\right| + \mu \\ &< \sum_{m=1}^{M} \left|\sum_{r=0}^{\mu-1} \left(1 + \frac{r}{v_{m-1}}\right)^{ti}\right| + Nt^{-\frac{1}{k+1}} \\ &< \sum_{m=1}^{M} S_m + Nt^{-\frac{1}{(k+1)K}} \log^{\frac{k-1}{K}} N \log^{\frac{1}{K}} t, \end{aligned} \tag{22}$$

wo

$$S_m = \left|\sum_{r=0}^{\mu-1} \left(1 + \frac{r}{v_{m-1}}\right)^{ti}\right|$$

gesetzt ist.

Auf S_m ist wegen (21) der Hilfssatz 5 anwendbar und ergibt,

$$\Theta_m = \frac{tk!\,H}{2k\,v_{m-1}^{k}} \qquad (1 \leqq m \leqq M)$$

gesetzt,

$$S_m < 8\left(\mu^{1-\frac{1}{K}} + \mu^{1-\frac{k}{K}} \sqrt[K]{\sum_{h_1,\ldots,h_{k-1}=1}^{\mu} \text{Min.}\left(\mu, \frac{1}{|\sin \Theta_m|}\right)}\right),$$

also

$$\sum_{m=1}^{M} S_m < 8M\mu^{1-\frac{1}{K}} + 8\mu^{1-\frac{k}{K}} \sum_{m=1}^{M} \sqrt[K]{\sum_{h_\nu} \text{Min.}}. \tag{23}$$

Hierin ist nach (18) und (17)

$$(24)\qquad 8M\mu^{1-\frac{1}{K}} < 32 t^{\frac{1}{k+1}} N^{1-\frac{1}{K}} t^{-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)K}} < 32 N^{1-\frac{1}{K}} t^{\frac{1}{(k+1)K}} \log^{\frac{1}{K}} t;$$

andererseits ist

$$(25)\qquad \sum_{m=1}^{M} \sqrt[K]{\sum_{h_\nu} \text{Min.}} \leqq M^{1-\frac{1}{K}} \sqrt[K]{\sum_{m=1}^{M} \sum_{h_\nu} \text{Min.}} = M^{1-\frac{1}{K}} \sqrt[K]{\sum_{h_\nu} \sum_{m} \text{Min.}}.$$

Bei festem H (also um so mehr bei festen h_ν) fällt Θ_m mit wachsendem m. Für $1 \leqq m < M$ ist

$$\Theta_m - \Theta_{m+1} = \frac{tk!\,H}{2k}\left(\frac{1}{v_{m-1}^k} - \frac{1}{v_m^k}\right) < \frac{tk!\,H}{2k} \frac{k(v_m - v_{m-1})}{v_m^{k+1}},$$

also nach (20) und (17)

$$\Theta_m - \Theta_{m+1} > \frac{tk!\,H}{2k} \frac{k\mu}{(2N)^{k+1}} > \frac{tk!\,H}{2} \frac{Nt^{-\frac{1}{k+1}}}{4(2N)^{k+1}} = \frac{k!}{2^{k+1}} H t^{\frac{k}{k+1}} N^{-k} = \Delta,$$

wo Δ von m frei ist.

Aus

$$\Theta_1 = \frac{tk!\,H}{2k(N+w)^k} < tk!\,HN^{-k}$$

folgt, daß die Anzahl der von Θ_m betroffenen Teilstrecken der Form

$$g\frac{\pi}{2} < x \leqq (g+1)\frac{\pi}{2} \qquad (g \text{ ganz})$$

kleiner als

$$(26)\qquad 1 + \frac{2}{\pi} tk!\,HN^{-k} < 1 + tk!\,HN^{-k}$$

ist. Auf jeder solchen Teilstrecke durchläuft $|\sin \Theta_m|$, vom Ende mit $\sin = 0$ angefangen (d. h. rückwärts bei ungeradem g), höchstens M Werte, von denen der zweite $\geqq \sin \Delta$, der dritte $\geqq \sin 2\Delta$, ..., der $(l+1)$-te $\geqq \sin l\Delta$ ist, wo stets noch $l\Delta \leqq \frac{\pi}{2}$ ist. Die einem bestimmten g entsprechende Teilsumme von $\sum_m \text{Min.}$ ist also, wegen $\sin l\Delta \geqq \frac{2}{\pi} l\Delta > \frac{l\Delta}{2}$ und (18), stets

$$< \mu + \sum_{l=1}^{M} \frac{2}{l\Delta} < \mu + \frac{2}{\Delta}(1 + \log M) < \mu + \frac{2}{\Delta}(1 + \log(4t^{\frac{1}{2}}))$$

$$< \mu + \frac{2}{\Delta}\left(3 + \frac{1}{2}\log t\right) < \mu + \frac{7}{\Delta}\log t;$$

wegen

$$\mu\Delta \leqq \mu \frac{k!}{2^{k+1}} \mu^{k-1} t^{\frac{k}{k+1}} N^{-k} < k!\,(\mu t^{\frac{1}{k+1}} N^{-1})^k < k!$$

ist jene Teilsumme also

$$< \frac{k!}{A} + \frac{7 \log t}{A} < \frac{k! \log t}{A} + \frac{7 k! \log t}{A} = \frac{8 k! \log t}{A} = \frac{8 k! \log t \cdot 2^{k+4}}{k! H t^{k+1} N^{-k}}$$

$$\leqq 2^{8k} t^{-\frac{k}{k+1}} \log t \cdot N^k \frac{1}{H}. \tag{27}$$

Aus (26) und (27) folgt

$$\sum_m \text{Min.} < (1 + t k! H N^{-k}) 2^{8k} t^{-\frac{k}{k+1}} \log t \cdot N^k \frac{1}{H}$$

$$= 2^{8k} t^{-\frac{k}{k+1}} \log t \cdot N^k \frac{1}{H} + 2^{8k} k! t^{\frac{1}{k+1}} \log t. \tag{28}$$

Nun ist

$$\sum_{h_\nu} \frac{1}{H} = \Big(\sum_{h=1}^{\mu} \frac{1}{h} \Big)^{k-1} \leqq (1 + \log \mu)^{k-1} \leqq (1 + \log N)^{k-1}$$

$$\leqq (2 \log N)^{k-1} < 2^k \log^{k-1} N, \tag{29}$$

$$\sum_{h_\nu} 1 = \mu^{k-1} \leqq N^{k-1} t^{-\frac{k-1}{k+1}}. \tag{30}$$

Aus (28), (29), (30) folgt

$$\sum_{h_\nu} \sum_m \text{Min.} < 2^{9k} t^{-\frac{k}{k+1}} \log t \cdot N^k \log^{k-1} N + 2^{8k} k! t^{-\frac{k-2}{k+1}} \log t \cdot N^{k-1}.$$

Hierin ist

$$2^{9k} \leqq 2^{9K} < 2^{11K},$$

$$2^{8k} k! \leqq 2^{8K} k^k < 2^{8K} 2^{k^2} < 2^{8K} 2^{3K} = 2^{11K};$$

daher ist, zur Abkürzung

$$2^{11} \Big(t^{-\frac{k}{(k+1)K}} N^{\frac{k}{K}} \log^{\frac{k-1}{K}} N + t^{-\frac{k-2}{(k+1)K}} N^{\frac{k-1}{K}} \Big) \log^{\frac{1}{K}} t = V$$

gesetzt,

$$\sum_{h_\nu} \sum_m \text{Min.} < V^K,$$

$$V \sqrt[K]{\sum_{h_\nu} \sum_m \text{Min.}} < V,$$

also nach (25) und (18)

$$8 \mu^{1-\frac{k}{K}} \sum_m \sqrt[K]{\sum_{h_\nu} \text{Min.}} < 8 N^{1-\frac{k}{K}} t^{-\frac{1}{k+1} + \frac{k}{(k+1)K}} 4 t^{\frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)K}} V$$

$$= 2^{16} \Big(t^{-\frac{1}{(k+1)K}} N \log^{\frac{k-1}{K}} N + t^{\frac{1}{(k+1)K}} N^{1-\frac{1}{K}} \Big) \log^{\frac{1}{K}} t. \tag{31}$$

Aus (22), (23), (24), (31) folgt die Behauptung.

Hilfssatz 7. *Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes 6 ist für* $\sigma > 0$

$$\left|\sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^s}\right| < 2^{17}\left(N^{1-\frac{1}{K}-\sigma} t^{\frac{1}{(k+1)K}} + N^{1-\sigma} t^{-\frac{1}{(k+1)K}} \log^{\frac{k-1}{K}} N\right) \log^{\frac{1}{K}} t.$$

Beweis. Nach Hilfssatz 6 ist für $N \leqq N'' \leqq N'$

$$\left|\sum_{n=N}^{N''} \frac{1}{(n+w)^{ti}}\right| < Z.$$

Aus Hilfssatz 1 folgt also, da $\frac{1}{n^\sigma}$ bei fallendem n monoton wächst, positiv und $\leqq N^{-\sigma}$ ist, die Behauptung

$$\left|\sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^s}\right| < ZN^{-\sigma}.$$

§ 2.

Beweis von (9) (erster Hauptsatz).

Hilfssatz 8. *Für* $k \geqq 3$, $1 - \frac{1}{4K} \leqq \sigma < 1$, $t > 3$ *ist*

$$\left|\sum_{t^{\frac{2}{k+2}} < n \leqq t^{\frac{2}{k+1}}} \frac{1}{(n+w)^s}\right| < 2^{18} t^{-\frac{1}{8kK}} \log^2 t.$$

Beweis. Ich verteile die Summe, wenn sie nicht leer ist, in lauter Teilsummen

$$\sum_{n=N}^{2N-1} \frac{1}{(n+w)^s},$$

deren erste bei $[t^{\frac{2}{k+2}}]+1$, deren zweite beim Doppelten dieser Zahl ... beginnt; nur die letzte Summe ist eventuell kürzer. Die Anzahl dieser Teilsummen ist $\leqq \log t$, da

$$t^{\frac{2}{k+2}} 2^{\log t} > 2^{\log t} = t^{\log 2} > t^{\frac{2}{k+1}}$$

ist. Wegen $\log N < \log t$, $t^{\frac{2}{k+2}} < N \leqq t^{\frac{2}{k+1}}$ ist nach Hilfssatz 7 jede Teilsumme absolut

$$< 2^{17}\left(N^{-\frac{3}{4K}} t^{\frac{1}{(k+1)K}} + N^{\frac{1}{4K}} t^{-\frac{1}{(k+1)K}}\right) \log t$$

$$< 2^{17}\left(t^{-\frac{3}{2(k+2)K} + \frac{1}{(k+1)K}} + t^{\frac{1}{2(k+1)K} - \frac{1}{(k+1)K}}\right) \log t,$$

und hierin sind die Exponenten bzw.

$$-\frac{k-1}{2(k+2)(k+1)K} = -\frac{1}{2(k+2)K}\frac{k-1}{k+1} < -\frac{1}{4kK}\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2(k+1)K} \leqq -\frac{1}{8kK}.$$

Hilfssatz 9. *Für* $\frac{31}{32} \leqq \sigma < 1$, $t > 3$ *ist*

$$\Big| \sum_{t^{\frac{1}{2}} < n \leqq t^2} \frac{1}{(n+w)^s} \Big| < A_8.$$

Beweis. Ich verteile die Summe in Teilsummen wie beim Beweise des Hilfssatzes 8, bei $[t^{\frac{1}{2}}]+1$ beginnend. Die Anzahl der Teilsummen ist $O(\log t)$; jede Teilsumme ist, wegen $\log N \leqq 2\log t$, $t^{\frac{1}{2}} < N \leqq t^2$, nach dem Spezialfall $k=2$ des Hilfssatzes 7 absolut

$$< 2^{18}\left(N^{\frac{1}{2}-\sigma}t^{\frac{1}{6}} + N^{1-\sigma}t^{-\frac{1}{6}}\right)\log t \leqq 2^{18}\left(N^{-\frac{15}{32}}t^{\frac{1}{6}} + N^{\frac{1}{32}}t^{-\frac{1}{6}}\right)\log t$$

$$< 2^{18}\left(t^{-\frac{15}{64}+\frac{1}{6}} + t^{\frac{1}{16}-\frac{1}{6}}\right)\log t = O\left(\frac{1}{\log t}\right).$$

Hilfssatz 10. *Bei ganzem* r, $6 \leqq r \leqq \log\log t$, $R = 2^{r-1}$ *ist für* $1 - \frac{1}{R} \leqq \sigma < 1$

$$\Big| \sum_{t^r < n \leqq t^2} \frac{1}{(n+w)^s} \Big| < A_9.$$

Beweis. Für $3 \leqq k \leqq r-2$ ist wegen $\sigma \geqq 1 - \frac{1}{R} \geqq 1 - \frac{1}{4K}$, $t > 3$ nach Hilfssatz 8

$$\Big| \sum_{t^{k+2} < n \leqq t^{k+1}} \frac{1}{(n+w)^s} \Big| < 2^{18} t^{-\frac{1}{8kK}} \log^2 t < 2^{18} t^{-\frac{1}{8rR}} \log^2 t$$

$$\leqq 2^{18} t^{-\frac{1}{8\log\log t\, 2^{\log\log t - 1}}} \log^2 t = 2^{18} e^{-\frac{\log 1 - \log 2\, t}{4\log\log t}} \log^2 t = O\left(\frac{1}{\log t}\right).$$

Daher ist

$$\Big| \sum_{t^r < n \leqq t^2} \frac{1}{(n+w)^s} \Big| = \Big| \sum_{k=3}^{r-2} \sum_{t^{k+2} < n \leqq t^{k+1}} \frac{1}{(n+w)^s} \Big| \leqq r\, O\left(\frac{1}{\log t}\right) < A_{10},$$

woraus wegen $1 - \frac{1}{R} \geqq \frac{31}{32}$ in Verbindung mit Hilfssatz 9 die Behauptung folgt.

Hilfssatz 11. *Für* $\frac{31}{32} \leqq \sigma < 1$ *ist gleichmäßig*

$$\zeta(s,w) = \sum_{n=0}^{[t^2]} \frac{1}{(n+w)^s} + O(1).$$

Beweis. Für $\sigma > 1$ und jedes ganze $m \geqq 0$ ist

$$\zeta(s,w) - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(n+w)^s} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{(n+w)^s} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{n-(n-1)}{(n+w)^s}$$

$$= -\frac{m}{(m+w)^s} + \sum_{n=m}^{\infty} n\left(\frac{1}{(n+w)^s} - \frac{1}{(n+1+w)^s}\right)$$

$$= -\frac{m}{(m+w)^s} + s\sum_{n=m}^{\infty} n\int_n^{n+1} \frac{du}{(u+w)^{s+1}} = -\frac{m}{(m+w)^s} + s\int_m^{\infty} \frac{[u]\,du}{(u+w)^{s+1}},$$

ferner

$$s\int_m^x \frac{u\,du}{(u+w)^{s+1}} = \left\{-\frac{u}{(u+w)^s} - \int \frac{du}{(u+w)^s}\right\}_m^x = \frac{m}{(m+w)^s} - \int_m^x \frac{du}{(u+w)^s}$$

$$= \frac{m}{(m+w)^s} + \frac{1}{s-1}\frac{1}{(m+w)^{s-1}},$$

also

$$\zeta(s,w) - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(n+w)^s} = \frac{1}{(s-1)(m+w)^{s-1}} - s\int_m^{\infty} \frac{u-[u]}{(u+w)^{s+1}}\,du. \tag{32}$$

Dies stellt offenbar $\zeta(s,w)$ für $\sigma > 0$ exkl. $s=1$ dar, also für $\frac{31}{32} \leqq \sigma < 1$, $t > 0$. Wird $m = [t^2]$ eingesetzt, so ist für $\frac{31}{32} \leqq \sigma < 1$ die rechte Seite gleichmäßig

$$O\left(\frac{m^{1-\sigma}}{t}\right) + O\left(t\int_m^{\infty} \frac{du}{u^{\frac{31}{32}+1}}\right) = O\left(\frac{m^{\frac{1}{32}}}{t}\right) + O\left(t\,m^{-\frac{31}{32}}\right) = O(1).$$

Erster Hauptsatz. *Für* $\frac{63}{64} \leqq \sigma < 1$ *ist gleichmäßig*

$$\zeta(s,w) = O\left(t^{\frac{4(1-\sigma)}{\log\frac{1}{1-\sigma}}} \frac{\log t}{\log\log t}\right). \tag{9}$$

Beweis. Für $t \geqq e^{e^6}$ werde

$$r = \left[\mathrm{Min.}\left(\frac{\log\frac{1}{1-\sigma}}{\log 2}, \log\log t\right)\right]$$

gesetzt. Dann ist

$$6 \leqq r \leqq \log\log t.$$

Wegen $\sigma \geqq 1 - \frac{1}{2^r} = 1 - \frac{1}{R}$ ist Hilfssatz 10 anwendbar. Aus ihm und Hilfssatz 11 folgt gleichmäßig

$$|\zeta(s,w)| = O(1) + \left|\sum_{n=0}^{\left[\frac{2}{t^r}\right]} \frac{1}{(n+w)^s}\right| = O(1) + O\sum_{n=2}^{\left[\frac{2}{t^r}\right]} \frac{1}{n^\sigma}.$$

1. Es sei

$$\frac{1}{1-\sigma} \geqq \frac{\log t}{\log\log t}.$$

Dann ist für große t

$$r \geqq \left[\text{Min.}\left(\frac{\log\log t - \log\log\log t}{\log 2}, \log\log t\right)\right] > \frac{\log\log t}{2}.$$

$$\sum_{n=2}^{\left[t^{\frac{2}{r}}\right]} \frac{1}{n^{\sigma}} = \sum_{n=2}^{\left[t^{\frac{2}{r}}\right]} \frac{n^{1-\sigma}}{n} \leqq t^{\frac{2}{r}(1-\sigma)} \sum_{n=2}^{\left[t^{\frac{2}{r}}\right]} \frac{1}{n} \qquad e^{\log t \frac{4}{\log\log t} \frac{\log\log t}{\log t} \log\left(t^{\frac{2}{r}}\right)}$$

$$= O\left(\frac{\log t}{r}\right) = O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right) = O\left(t^{\log\frac{1}{1-\sigma}\,\frac{4(1-\sigma)}{\log\log t}}\right).$$

2. Es sei

$$\frac{1}{1-\sigma} < \frac{\log t}{\log\log t}.$$

Dann ist

$$\log\frac{1}{1-\sigma} < \log\log t,$$

$$r \geqq \left[\log\frac{1}{1-\sigma}\right] > \frac{1}{2}\log\frac{1}{1-\sigma},$$

$$\sum_{n=2}^{\left[t^{\frac{2}{r}}\right]} \frac{1}{n^{\sigma}} < \int_{0}^{t^{\frac{2}{r}}} \frac{du}{u^{\sigma}} = \frac{t^{\frac{2}{r}(1-\sigma)}}{1-\sigma} = O\left(t^{\log\frac{1}{1-\sigma}\,\frac{4(1-\sigma)}{\log\log t}}\right).$$

§ 3.

Beweis von (8) (zweiter Hauptsatz).

Hilfssatz 12. *Für ganzes $q \geq 2$ ist, $Q = 2^{q-1}$ gesetzt, wenn*

$$\sigma = 1 - \frac{1}{Q}, \quad t > 3, \quad \frac{t^{\frac{2}{q+1}}}{\log^{q-1} t} < N \leqq t^2, \quad N \leqq N' < 2N$$

ist,

$$\left|\sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^{s}}\right| < 2^{18} t^{\frac{1}{(q+1)Q} - \delta_q} \log^{q} t, \quad \delta_q > 0.$$

Beweis. N gehört entweder einem Intervall

$$\frac{t^{\frac{2}{k+2}}}{\log^{q-1} t} < N \leqq \frac{t^{\frac{2}{k+1}}}{\log^{q-1} t} \qquad (k = 2, 3, \ldots, q-1)$$

oder dem Intervall

$$\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\log^{q-1} t} < N \leqq t^2$$

an. Ersterenfalls verwende ich Hilfssatz 7 mit jenem k, letzterenfalls mit $k=1$.

Ersterenfalls ergibt sich, wegen $\log N < \log t$, $\log t < \log t$,

$$\left|\sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^s}\right| < 2^{17}\left(N^{\frac{1}{Q}-\frac{1}{K}} t^{\frac{1}{(k+1)K}} + N^{\frac{1}{Q}} t^{-\frac{1}{(k+1)K}}\right)\log t,$$

also, wegen $t^{-\frac{1}{(k+1)K}} < N^{-\frac{1}{K}} t^{\frac{1}{(k+1)K}}$,

$$\left|\sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^s}\right| < 2^{18} N^{\frac{1}{Q}-\frac{1}{K}} t^{\frac{1}{(k+1)K}} \log t < 2^{18}\left(\frac{t^{\frac{2}{k+2}}}{\log^{q-1} t}\right)^{\frac{1}{Q}-\frac{1}{K}} t^{\frac{1}{(k+1)K}} \log t$$

$$< 2^{18} t^{-\frac{2}{k+2}\left(\frac{1}{K}-\frac{1}{Q}\right)+\frac{1}{(k+1)K}} \log^q t.$$

Der Exponent von t ist, falls $k = q-1$,

$$= -\frac{2}{q+1}\left(\frac{2}{Q}-\frac{1}{Q}\right)+\frac{2}{qQ} = -\frac{2}{(q+1)Q}+\frac{2}{qQ} = \frac{2}{q(q+1)Q} < \frac{1}{(q+1)Q},$$

falls jedoch $k < q-1$ (also $Q \geqq 4K$),

$$\leqq -\frac{2}{k+2}\left(\frac{1}{K}-\frac{1}{4K}\right)+\frac{1}{(k+1)K} = \frac{1}{K}\left(-\frac{3}{2(k+2)}+\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{K}\frac{-k+1}{2(k+2)(k+1)}$$

$$< 0 < \frac{1}{(q+1)Q}.$$

Letzterenfalls ergibt sich

$$\sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^s}\Big| < 2^{17}(N^{-1+\frac{1}{Q}} t^{\frac{1}{2}} + N^{\frac{1}{Q}} t^{-\frac{1}{2}})\log t < 2^{17}\left(\frac{t^{-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{Q}\right)}}{\log^{-(q-1)\left(1-\frac{1}{Q}\right)} t} t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{2}{Q}} t^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$< 2^{17}(t^{-\frac{1}{6}+\frac{2}{3Q}} + t^{\frac{2}{Q}-\frac{1}{2}})\log^q t \leqq 2^{18}\log^q t.$$

Hilfssatz 13. *Für festes $q > 2$ ist auf $\sigma = 1 - \frac{1}{Q}$*

$$\sum_{\frac{t^{q+1}}{\log^{q-1} t} < n \leqq t^2} \frac{1}{(n+w)^s} = O(t^{\frac{1}{(q+1)Q}}).$$

Beweis. Hilfssatz 12 ist $O(\log t)$-mal anzuwenden.

Hilfssatz 14. *Für festes $q \geqq 2$ ist auf $\sigma = 1 - \frac{1}{Q}$*

$$\sum_{0 \leqq n \leqq \frac{t^{q+1}}{\log^{q-1} t}} \frac{1}{(n+w)^s} = O(t^{\frac{1}{(q+1)Q}} \log^{1+\frac{1}{Q}} t).$$

Beweis. Ich wende Hilfssatz 7 mit $k = q$, von $n = 1$ an beginnend, wie üblich, $O(\log t)$-mal an. Für $t > 3$ ist $\log N < \log t$, also jedesmal

$$\left|\sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^s}\right| < 2^{17}\left(t^{\frac{1}{(q+1)Q}} + N^{\frac{1}{Q}} t^{-\frac{1}{(q+1)Q}} \log^{\frac{q-1}{Q}} t\right) \log^{\frac{1}{Q}} t$$

$$< 2^{17} t^{\frac{1}{(q+1)Q}} \log^{\frac{1}{Q}} t + 2^{17} t^{\frac{2}{(q+1)Q}} t^{-\frac{1}{(q+1)Q}} \log^{\frac{q-1}{Q}} t \log^{\frac{1}{Q}} t$$

$$= 2^{18} t^{\frac{1}{(q+1)Q}} \log^{\frac{1}{Q}} t.$$

Zweiter Hauptsatz. *Für festes $q \geqq 2$ ist auf $\sigma = 1 - \frac{1}{Q}$*

$$\zeta(s, w) = O\left(t^{\frac{1}{(q+1)Q}} \log^{1+\frac{1}{Q}} t\right).$$

Beweis. 1. Es sei $q > 2$. Nach Hilfssatz 13 und 14 ist für $m = [t^2]$

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(n+w)^s} = O\left(t^{\frac{1}{(q+1)Q}} \log^{1+\frac{1}{Q}} t\right).$$

Die Behauptung folgt nunmehr aus (32); denn die rechte Seite von (32) ist

$$O\left(\frac{1}{t} m^{\frac{1}{Q}}\right) + O\left(t \int_m^\infty \frac{du}{u^{2-\frac{1}{Q}}}\right) = O\left(\frac{1}{t} m^{\frac{1}{Q}}\right) + O\left(t m^{-1+\frac{1}{Q}}\right) = o(1).$$

2. Es sei $q = 2$. Nach (32) ist, wenn m speziell die Bedeutung $\left[\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\log t}\right]$ hat und Hilfssatz 14 mit $q = 2$ benutzt wird,

$$\zeta(s, w) = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(n+w)^s} + \frac{1}{(s-1)(m+w)^{s-1}} - \frac{1}{2}\frac{1}{(m+w)^s} - s\int_m^\infty \frac{u - [u] - \frac{1}{2}}{(u+w)^{s+1}} du$$

$$= O\left(t^{\frac{1}{6}} \log^{\frac{3}{2}} t\right) + \left|\int_m^\infty \frac{u - [u] - \frac{1}{2}}{(u+w)^{s+1}} du\right| \cdot O(t);$$

es langt also, zu beweisen:

$$-\pi \int_m^\infty \frac{u - [u] - \frac{1}{2}}{(u+w)^{s+1}} du = \int_m^\infty \frac{du}{(u+w)^{s+1}} \sum_{h=1}^{x} \frac{\sin 2\pi h u}{h} = O\left(t^{-\frac{3}{4}} \log^{\frac{3}{2}} t\right).$$

$t > 2$ sei alsbald so groß, daß $m \geqq 1$ ist.

Bekanntlich ist für $a \geqq 1$ und jedes reelle u

$$\left|\sum_{h=a}^{x} \frac{\sin 2\pi h u}{h}\right| < A_{11}; \tag{33}$$

ferner ist für $1 \leqq a \leqq b$, $0 < u \leqq \frac{1}{2}$

$$\left| \sum_{h=a}^{b}{}' \sin 2\pi h u \right| \leqq \left| \sum_{h=a}^{b}{}' e^{2\pi h u i} \right| \leqq \frac{2}{\sin \pi u} \leqq \frac{1}{u},$$

also bei jedem nicht ganzen u, wenn $\{u\}$ der Abstand zur nächstgelegenen ganzen Zahl ist,

$$\left| \sum_{h=a}^{b}{}' \sin 2\pi h u \right| \leqq \frac{1}{\{u\}};$$

nach Hilfssatz 1 also

$$\left| \sum_{h=a}^{b}{}' \frac{\sin 2\pi h u}{h} \right| \leqq \frac{1}{a\{u\}};$$

für $a \geqq 1$ und nicht ganzes u ist daher

$$\left| \sum_{h=a}^{\infty}{}' \frac{\sin 2\pi h u}{h} \right| \leqq \frac{1}{a\{u\}}. \tag{34}$$

Aus (33) und (34) folgt für jedes reelle u

$$\left| \sum_{h=[t]+1}^{\infty}{}' \frac{\sin 2\pi h u}{h} \right| < A_{12} \operatorname{Min.}\left(1, \frac{1}{t\{u\}}\right).$$

Daher ist für $n \geqq m$

$$\left| \int_{n}^{n+1} \frac{du}{(u+w)^{s+1}} \sum_{h=[t]+1}^{\infty}{}' \frac{\sin 2\pi h u}{h} \right| < \frac{A_{12}}{n^{\frac{3}{2}}} \int_{n}^{n+1} \operatorname{Min.}\left(1, \frac{1}{t\{u\}}\right) du$$

$$= \frac{2A_{12}}{n^{\frac{3}{2}}} \int_{0}^{\frac{1}{2}} \operatorname{Min.}\left(1, \frac{1}{tu}\right) du = \frac{2A_{12}}{n^{\frac{3}{2}}} \left(\int_{0}^{\frac{1}{t}} du + \frac{1}{t} \int_{\frac{1}{t}}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u} \right) < \frac{A_{13} \log t}{n^{\frac{3}{2}} t};$$

folglich ist

$$\int_{m}^{\infty} \frac{du}{(u+w)^{s+1}} \sum_{h=[t]+1}^{\infty}{}' \frac{\sin 2\pi h u}{h} = O\left(\frac{\log t}{t} \sum_{n=m}^{\infty}{}' \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) = O(t^{-\frac{5}{6}} \log^{\frac{3}{2}} t),$$

und es verbleibt,

$$\int_{m}^{\infty} \frac{du}{(u+w)^{s+1}} \sum_{h=1}^{[t]}{}' \frac{\sin 2\pi h u}{h} = \sum_{h=1}^{[t]}{}' \frac{1}{h} \int_{m}^{\infty} \frac{\sin 2\pi h u \, du}{(u+w)^{s+1}} = O(t^{-\frac{5}{6}} \log^{\frac{3}{2}} t) \tag{35}$$

zu beweisen.

Nach einem oft von Herrn van der Corput und mir angewandten Satz ist für reelles $F(u)$ mit $F''(u) \geqq \lambda > 0$

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} e^{iF(u)} du \right| < \frac{A_{14}}{\sqrt{\lambda}};$$

hieraus folgt wegen

$$\frac{d^2}{du^2}(-t\log(u+w)\pm 2\pi hu) = -\frac{t}{(u+w)^2} \geqq \frac{t}{4u^2} \qquad (u \geqq 1)$$

für $v \geqq m$ und jedes h

$$\left|\int_m^v e^{i(-t\log(u+w)\pm 2\pi hu)}\,du\right| < \frac{2A_{14}u}{\sqrt{t}}.$$

Wird

$$G(v) = \int_m^v \frac{\sin 2\pi hu\,du}{(u+w)^{ti}}$$

gesetzt, so ist also

$$|G(v)| < \frac{2A_{14}v}{\sqrt{t}},$$

$$\left|\int_m^x \frac{\sin 2\pi hu\,du}{(u+w)^{s+1}}\right| = \left|\int_m^x \frac{G'(u)\,du}{(u+w)^{\frac{3}{2}}}\right| = \left|\frac{G(u)}{(u+w)^{\frac{3}{2}}}\right| + \frac{3}{2}\int G(u)\,du\Big|_m^\infty$$

$$\frac{3}{2}\left|\int_m^x \frac{G(u)}{(u+w)^{\frac{5}{2}}}\,du\right| < \frac{A_{15}}{\sqrt{t}}\int_m^x \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} < \frac{A_{16}}{\sqrt{t}\sqrt{m}} < A_{17}\,t^{-\frac{5}{6}}\log^{\frac{1}{2}}t;$$

damit ist wegen

$$\sum_{h=1}^{[t]} \frac{1}{h} = O(\log t)$$

(35) bewiesen.

§ 4.

Beweis von (6) (dritter Hauptsatz).

Hilfssatz 15. *Es sei* $r > 0$, $f(s)$ *für* $|s - s_0| \leqq r$ *regulär*, $M > 0$,

$$\left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| < e^M,$$

$f(s) \neq 0$ *im Halbkreis* $|s - s_0| \leqq r$, $\Re(s) > \Re(s_0)$.

1. *Dann ist*

$$-\Re\frac{f'}{f}(s_0) < \frac{4M}{r}. \tag{36}$$

2. *Gibt es eine Wurzel* ϱ *zwischen* $s_0 - \frac{r}{2}$ *und* s_0, *so ist*

$$-\Re\frac{f'}{f}(s_0) < \frac{4M}{r} - \frac{1}{s_0 - \varrho}. \tag{37}$$

Beweis. Steht im § 1 meiner vorangehenden Arbeit.

Dritter Hauptsatz. *Für jeden Charakter* χ *modulo* k *gibt es ein* $\tau(k)$, *so daß*

$$L(s,\chi) \neq 0 \quad \textit{für} \quad t \geqq \tau(k), \qquad \sigma \geqq 1 - \frac{\log\log t}{A_4 \log t}. \tag{6}$$

Beweis. Nach (10) ist für $\sigma \geqq 1 - \frac{(\log\log t)^2}{\log t}$, $t \geqq \tau_1(k)$

(38) $$|L(s,\chi)| < \log^{A_7} t, \qquad |L(s,\chi^2)| < \log^{A_7} t,$$

wo ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A_7 > 1$ ist. Ich setze

$$\sigma_0 = 1 + \frac{\log\log\gamma}{50 A_7 \log\gamma} \quad (\gamma > 3),$$

darf annehmen, daß es unendlich viele Wurzeln $\beta + \gamma i$ von $L(s,\chi)$ mit $\beta > \sigma_0 - \frac{(\log\log\gamma)^2}{2\log\gamma}$ gibt, und brauche nur für sie

$$(1-\beta)\frac{\log\gamma}{\log\log\gamma} > \frac{1}{A_{18}}, \quad \text{falls} \quad \gamma \geqq \tau_2(k),$$

zu beweisen; denn wenn es unendlich viele $\beta + \gamma i$, $\gamma > 3$ gibt, aber zuletzt $\beta \leqq \sigma_0 - \frac{(\log\log\gamma)^2}{2\log\gamma}$ ist, so ergibt sich sofort

$$(1-\beta)\frac{\log\gamma}{\log\log\gamma} > \left(\frac{(\log\log\gamma)^2}{2\log\gamma} - \frac{\log\log\gamma}{50 A_7 \log\gamma}\right)\frac{\log\gamma}{\log\log\gamma} \to \infty.$$

Für $s_0 = \sigma_0 + \gamma i$ und $s_0 = \sigma_0 + 2\gamma i$ gehört bei großem γ der Kreis $|s - s_0| \leqq r = \frac{(\log\log\gamma)^2}{\log\gamma}$ dem Gebiet $\sigma \geqq 1 - \frac{(\log\log t)^2}{\log t}$, $t \geqq \tau_1$ an; denn für großes γ ist

$$\frac{(\log\log(2\gamma+r))^2}{\log(2\gamma+r)} = \frac{(\log\log\gamma)^2}{\log\gamma + O(1)} = \frac{(\log\log\gamma)^2}{\log\gamma} + O\left(\frac{1}{\log\gamma}\right),$$

$$t \geqq \gamma - r \geqq \tau_1, \quad \sigma > 1 + \frac{\log\log\gamma}{50 A_7 \log\gamma} - \frac{(\log\log\gamma)^2}{\log\gamma} > 1 - \frac{(\log\log(2\gamma+r))^2}{\log(2\gamma-r)}$$

$$\geqq 1 - \frac{(\log\log t)^2}{\log t}.$$

Aus (38) nebst

$$\left|\frac{1}{L(s_0,\chi)}\right| \quad \text{und} \quad \left|\frac{1}{L(s_0,\chi^2)}\right| \leqq \zeta(\sigma_0) < \frac{A_{19}}{\sigma_0 - 1} = \frac{A_{20}\log\gamma}{\log\log\gamma}$$

folgt für großes γ im Kreise $|s - s_0| \leqq r$

$$\left|\frac{L(s,\chi)}{L(s_0,\chi)}\right| \quad \text{und} \quad \left|\frac{L(s,\chi^2)}{L(s_0,\chi^2)}\right| < \frac{A_{20}\log\gamma}{\log\log\gamma}\log^{A_7}\left(2\gamma + \frac{(\log\log\gamma)^2}{\log\gamma}\right) < \log^{2A_7}\gamma.$$

Der Hilfssatz 15, mit $M = 2A_7 \log\log\gamma$, ergibt also für großes γ nach (37)

$$-\Re\frac{L'}{L}(\sigma_0 + \gamma i, \chi) < \frac{8A_7\log\log\gamma}{(\log\log\gamma)^2} - \frac{1}{\sigma_0 - \beta} = \frac{8A_7\log\gamma}{\log\log\gamma} - \frac{1}{\sigma_0 - \beta},$$

nach (36)

$$-\Re\frac{L'}{L}(\sigma_0 + 2\gamma i, \chi^2) < \frac{8A_7\log\gamma}{\log\log\gamma}.$$

Aus $\chi(p^m) = e^{\Psi(p,m)i}$ für $p \nmid k$ und

$$3 + 4\cos\psi + \cos 2\psi = 2(1+\cos\psi)^2 \geqq 0$$

folgt

$$0 < \sum_{\substack{p,m \\ p \nmid k}}^{*} \frac{\log p}{p^{m\sigma_0}} \left(3 + 4\cos(\Phi(p,m) - \gamma m \log p) + \cos(2\Phi(p,m) - 2\gamma m \log p)\right)$$

$$= -3\frac{L'}{L}(\sigma_0, \chi_0) - 4\,\Re\frac{L'}{L}(\sigma_0 + \gamma i, \chi) - \Re\frac{L'}{L}(\sigma_0 + 2\gamma i, \chi^2),$$

also für großes γ

$$0 < \frac{3{,}04}{\sigma_0 - 1} + \frac{40\,A_7 \log\gamma}{\log\log\gamma} - \frac{4}{\sigma_0 - \beta} = \frac{192\,A_7 \log\gamma}{\log\log\gamma} - \frac{4}{\sigma_0 - \beta},$$

$$1 - \beta + \frac{\log\log\gamma}{50\,A_7 \log\gamma} = \sigma_0 - \beta > \frac{\log\log\gamma}{48\,A_7 \log\gamma},$$

$$1 - \beta > \frac{\log\log\gamma}{A_7 \log\gamma}\left(\frac{1}{48} - \frac{1}{50}\right) = \frac{\log\log\gamma}{A_{18}\log\gamma}.$$

§ 5.

Beweis von (7) (vierter Hauptsatz).

Hilfssatz 16. *Für* $\sigma < 1 - \frac{\log\log t}{A_{21}\log t}$ *ist gleichmäßig*

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = O(\log^3 t).$$

Beweis. Für $\sigma < 1 - \frac{\log\log t}{A_1 \log t}$ ist $\log L(s)$ nach dem dritten Hauptsatz zuletzt regulär; weil dort gleichmäßig

$$L(s, \chi) = O(t),$$

also gleichmäßig

$$\Re \log L(s, \chi) < O(\log t)$$

ist, ergibt die Carathéodorysche Ungleichung für $\sigma \leqq 1 - \frac{\log\log t}{2A_1 \log t}$ gleichmäßig

$$\log L(s, \chi) = O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\log t\right) = O(\log^2 t);$$

also ist für $\sigma < 1 - \frac{\log\log t}{3A_1 \log t}$ gleichmäßig

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\log^2 t\right) = O(\log^3 t).$$

Vierter Hauptsatz. Es ist

$$(7) \qquad \pi(x; k, l) - \frac{1}{\varphi(k)}\int_2^x \frac{du}{\log u} = O\left(x e^{-\frac{1}{A_5}\sqrt{\log x \log\log x}}\right).$$

Beweis. Nach Hilfssatz 16 ist aus Symmetriegründen für

$$|t| \geqq \tau_2(k) > 3, \quad \sigma \geqq 1 - \frac{\log\log|t|}{A_{21}\log|t|}$$

die Funktion $L(s, \chi)$ regulär, $\neq 0$ und gleichmäßig

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = O(\log^3 |t|). \tag{39}$$

Ich wähle $\Theta = \Theta(k)$ so, daß $1 - \frac{\log\log \tau_2}{A_{21} \log \tau_2} < \Theta < 1$ ist und $L(s, \chi)$ für $|t| \leqq \tau$, $\sigma \geqq \Theta$ exkl. $s = 1$ regulär und $\neq 0$ ist. Ich setze

$$E_{\chi_0} = 1, \quad \text{sonst} \quad E_\chi = 0.$$

Dann ist

$$\sum_{p^m \leqq x} \chi(p^m) \log p \log \frac{x}{p^m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^s}{s^2} \sum_{p,m} \frac{\chi(p^m) \log p}{p^{ms}} ds$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^s}{s^2} \frac{L'}{L}(s, \chi) ds - E_\chi x = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{x^s}{s^2} \frac{L'}{L}(s, \chi) ds.$$

erstreckt über die Kurve $\sigma = 1 - \frac{\log\log |t|}{A_{21} \log |t|} + ti$ von $t = -\infty$ bis $t = -\tau_2$ und von $t = \tau_2$ bis $t = \infty$ und über den Streckenzug von $1 - \frac{\log\log \tau_2}{A_{21} \log \tau_2} - \tau_2 i$ über $\Theta - \tau_2 i$ und $\Theta + \tau_2 i$ nach $1 - \frac{\log\log \tau_2}{A_{21} \log \tau_2} + \tau_2 i$.

Der Beitrag des Streckenzuges ist $O(x^\Theta)$. Der Beitrag der krummen Wegteile ist nach (39)

$$O\int_{\tau_2}^{\infty} x^{1 - \frac{\log\log t}{A_{21} \log t}} \frac{\log^3 t \, dt}{t^2} = O\left(x \log^3 x \int_{\tau_2}^{e^{\sqrt{\log x \log\log x}}} x^{-\frac{\log\log t}{A_{21} \log t}} \frac{dt}{t^2}\right)$$

$$+ O\left(x \int_{e^{\sqrt{\log x \log\log x}}}^{x} \frac{\log^3 t \, dt}{t^2}\right)$$

$$= O\left(x \log^3 x \, x^{-\frac{\log\left(\sqrt{\log x \log\log x}\right)}{A_{21} \sqrt{\log x \log\log x}}}\right) + O\left(x^{e^{-\left(\sqrt{\log x \log\log x}\right)^3}}\right)$$

$$= O\left(x \log^3 x \, e^{-\frac{1}{A_{22}} \sqrt{\log x \log\log x}}\right) + O\left(x \log^3 x \, e^{-\sqrt{\log x \log\log x}}\right)$$

$$= O\left(x e^{-\frac{1}{A_{23}} \sqrt{\log x \log\log x}}\right).$$

Wird

$$\delta = \delta(x) = e^{-2\frac{1}{A_{23}} \sqrt{\log x \log\log x}}$$

gesetzt, so ist also

$$\sum_{p^m \leqq x} \chi(p^m) \log p \log \frac{x}{p^m} = E_\chi x + O(\delta^2 x),$$

$$\sum_{p \leqq x} \chi(p) \log p \log \frac{x}{p} = E_\chi x + O(\delta^2 x),$$

$$\sum_{\substack{p \leqq x \\ p = l}} \log p \log \frac{x}{p} = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \sum_{p \leqq x} \chi(p) \log p \log \frac{x}{p} = \frac{x}{\varphi(k)} + O(\delta^2 x),$$

$$\sum_{\substack{p \leqq (1+\delta)x \\ p = l}} \log p \log \frac{(1+\delta)x}{p} = \frac{x}{\varphi(k)} + \frac{\delta x}{\varphi(k)} + O(\delta^2 x).$$

folglich durch Subtraktion

$$\log(1+\delta) \sum_{\substack{p \leqq x \\ p = l}} \log p + \sum_{\substack{x < p \leqq (1+\delta)x \\ p = l}} \log p \log \frac{(1+\delta)x}{p} = \frac{\delta x}{\varphi(k)} + O(\delta^2 x);$$

die zweite Summe links ist

$$O(\delta x \log x \log(1+\delta));$$

daher ist

$$g(x) = \sum_{\substack{p \leqq x \\ p = l}} \log p - \frac{x}{\varphi(k)} = \left(\frac{\delta}{\log(1+\delta)} - 1\right) \frac{x}{\varphi(k)} + O(\delta x \log x) + O\left(\frac{\delta^2 x}{\log(1+\delta)}\right)$$

$$= O(\delta x \log x) = O\left(x e^{-\frac{1}{A_5}\sqrt{\log x \log\log x}}\right),$$

$$\pi(x; k, l) - \frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{du}{\log u} = \sum_{n=2}^{[x]} \frac{g(n) - g(n-1)}{\log n} + O(1)$$

$$= \sum_{n=2}^{[x]} g(n) \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + O\left(x e^{-\frac{1}{A_5}\sqrt{\log x \log\log x}}\right)$$

$$= O\left(x e^{-\frac{1}{A_5}\sqrt{\log x \log\log x}}\right) \sum_{n=2}^{[x]} \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + O\left(x e^{-\frac{1}{A_5}\sqrt{\log x \log\log x}}\right)$$

$$= O\left(x e^{-\frac{1}{A_5}\sqrt{\log x \log\log x}}\right).$$

Eibsee, den 28. August 1923.

(Eingegangen am 30. August 1923.)

Über potentialkonvexe Funktionen.

Von

Robert Remak in Berlin.

Eine stetige reelle Funktion in einem zusammenhängenden Gebiete der Ebene heiße potentialkonvex, wenn sie im Innern eines jeden Kreises, der ganz im Innern des Gebietes liegt, größer oder gleich dem Poissonschen Integral über ihre Werte auf dem Rande des Kreises ist.

Eine negativ genommene potentialkonvexe Funktion heiße potentialkonkav.

Denkt man sich die Funktionswerte als dritte Koordinate aufgetragen, so liegt die Fläche der potentialkonvexen Funktion stets über oder auf der Potentialfläche des Poissonschen Integrals, so wie die konvexe Kurve, die eine konvexe Funktion einer Veränderlichen darstellt, stets über oder auf der Sehne liegt.

Eine potentialkonvexe, mit Einschluß des Randes stetige Funktion in einem Gebiete, die auf dem Rande größer oder gleich vorgegebenen Randwerten ist, nennen wir mit Herrn Perron[1]) eine Oberfunktion, entsprechend eine potentialkonkave Funktion, die auf dem Rande kleiner oder gleich den vorgegebenen Randwerten ist, eine Unterfunktion.

Wir folgen Herrn Perron im Beweise der Hilfssätze in § 2 seiner Arbeit.

[1]) Anmerkung der Schriftleitung. Am 15. Dezember 1922 reichte Herr Remak der Schriftleitung eine Arbeit unter obigem Titel ein, die, unabhängig entstanden, mit der Arbeit des Herrn Perron: „Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$“ diese Zeitschrift **18** (1923), S. 42—54 im zu beweisenden Hauptsatz und den Hilfssätzen des § 2 übereinstimmte. In der Behandlung des Randes beschränkte sich Herr Remak der Einfachheit halber auf Jordankurven, übereinstimmend mit dem § 5 der Perronschen Arbeit. Eine Abweichung ergab sich gegenüber dem § 3, wo Herr Remak mit längerer Beweisanordnung die Benutzung der Lebesgueschen Theorie vermeidet. Auf Wunsch der Schriftleitung paßte Herr Remak seine Arbeit inhaltlich und in den Bezeichnungen derjenigen des Herrn Perron an, die ihm im Fahnenabzug zugänglich gemacht wurde.

Hilfssatz 1. *Das Minimum von endlich vielen Oberfunktionen ist eine Oberfunktion.*

Hilfssatz 2. *Eine Oberfunktion behält ihre Eigenschaft, wenn man sie in einem Kreise im Innern des Gebietes durch das Poissonsche Integral über ihre Werte auf seinem Rande ersetzt.*

Hilfssatz 3. *Eine potentialkonvexe Funktion kann kein Minimum im Innern des Gebiets annehmen.* (Schluß vom § 1 der Perronschen Arbeit.)

Im folgenden soll ohne Benutzung der Lebesgueschen Theorie gezeigt werden, daß die untere Grenze der Oberfunktionen harmonisch ist.

Es sei $\mathfrak{x}$ ein Punkt im Innern des Gebietes, K ein Kreis, der $\mathfrak{x}$ in seinem Innern enthält, ψ eine beliebige Oberfunktion, u die untere Grenze aller ψ. $u(\mathfrak{x})$ besitzt als untere Grenze einer Menge von stetigen Funktionen die obere Halbstetigkeit, wie leicht zu zeigen. D. h. nach Vorgabe von $\varepsilon > 0$ läßt sich für jeden festen Punkt $\mathfrak{x}_0$ $\delta > 0$ so bestimmen, daß für $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| < \delta$ die Ungleichheit $\psi(\mathfrak{x}) < \psi(\mathfrak{x}_0) + \varepsilon$ erfüllt ist. Unter $\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0$ werde die Entfernung der Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_0$ verstanden. $M_K \psi$ sei das Poissonsche Integral über die Werte von ψ, die es auf dem Rande von K annimmt. Da $\psi \geqq M_K \psi$, so ist die untere Grenze der ψ größer oder gleich der unteren Grenze der $M_K \psi$; da aber die Werte $M_K \psi(\mathfrak{x})$ nach Hilfssatz 2 unter den Werten $\psi(\mathfrak{x})$ vorkommen, so ist $u(\mathfrak{x})$ gleich der unteren Grenze der $M_K \psi$. Es ist ausführlicher:

$$M_K \psi(\mathfrak{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_K \psi(\mathfrak{k}) P(\mathfrak{k}, \mathfrak{x}) \, d\vartheta .$$

Hierin bedeute $\mathfrak{k}$ einen Punkt auf dem Rande des Kreises K, ϑ sein Winkelargument, $P(\mathfrak{k}, \mathfrak{x})$ die bekannte Funktion des Poissonschen Integrals, von der wir uns nur merken wollen, daß sie in $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{x}$ stetig ist und positiv, solange $\mathfrak{x}$ im Innern des Kreises K gelegen ist. Indem man sich $\mathfrak{x}$ festgehalten, $\mathfrak{k}$ auf dem Kreise veränderlich denkt, wird zur Abkürzung

$$\psi(\mathfrak{k}) \cdot P(\mathfrak{k}, \mathfrak{x}) = \Psi(\mathfrak{k})$$

gesetzt. Da $\Psi(\mathfrak{k})$ eine stetige Funktion von ϑ, ist das Poissonsche Integral ein gewöhnliches Integral im Riemannschen Sinne und läßt sich als oberes Integral im Riemannschen Sinne auffassen. Es ist also $M_K \psi(\mathfrak{x})$ die untere Grenze aller Summen

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \Psi(\mathfrak{k}_\nu \psi)(\vartheta_{\nu+1} - \vartheta_\nu) \tag{1}$$

für eine bestimmte Funktion $\Psi(\mathfrak{k})$, einen festen Kreis K und alle möglichen Intervalleinteilungen ϑ_ν. Hierbei ist $\vartheta_{n+1} = \vartheta_1 + 2\pi$; $\mathfrak{k}_\nu \psi$ ent-

spricht dem Werte $\vartheta_\nu \psi$, der dem Intervalle ϑ_ν bis $\vartheta_{\nu+1}$ angehört und das Maximum von $\Psi(\mathfrak{t})$ im Intervalle li fert; $u(\mathfrak{x})$ läßt sich also als die untere Grenze einer Menge von unteren Grenzen von Zahlmengen ansehen, Also ist $u(\mathfrak{x})$ die untere Grenze der Vereinigungsmenge dieser Zahlmengen. wie aus der Definition der unteren Grenze leicht folgt. $u(\mathfrak{x})$ ist also die untere Grenze aller Summen von der Form (1) für den festen Kreis K, alle zulässigen $\psi(\mathfrak{t})$ und alle möglichen Intervalleinteilungen ϑ_ν. Setzt man

$$u(\mathfrak{t}) \cdot P(\mathfrak{t}, \mathfrak{x}) = U(\mathfrak{t}),$$

so ist $U(\mathfrak{t})$ die untere Grenze aller $\Psi(\mathfrak{t})$, da $P(\mathfrak{t}, \mathfrak{x})$ hierbei festzuhalten ist. $U(\mathfrak{t})$ besitzt also die obere Halbstetigkeit, mithin in jedem abgeschlossenen Intervalle $\mathfrak{t}_\nu$ bis $\mathfrak{t}_{\nu-1}$ ein Maximum[1]), das in $\mathfrak{t}_{\nu U}$ angenommen wird.

Nach Vorgabe eines beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ läßt sich für jeden einzelnen Wert $\bar{\mathfrak{t}}$ eine spezielle Funktion $\bar{\Psi}(\mathfrak{t})$ so angeben, daß $\bar{\Psi}(\bar{\mathfrak{t}}) < U(\bar{\mathfrak{t}}) + \frac{\varepsilon}{2}$ wird. Ferner läßt sich wegen der Stetigkeit von $\bar{\Psi}(\mathfrak{t})$ eine Umgebung von $\bar{\mathfrak{t}}$ $|\mathfrak{t} - \bar{\mathfrak{t}}| < \delta$ so angeben, daß $|\bar{\Psi}(\mathfrak{t}) - \bar{\Psi}(\bar{\mathfrak{t}})| < \frac{\varepsilon}{2}$, also für die Umgebung $\bar{\Psi}(\mathfrak{t}) < U(\bar{\mathfrak{t}}) + \varepsilon$ wird. Unter diesen für jeden Punkt eines abgeschlossenen Intervalls $\mathfrak{t}_\nu$ bis $\mathfrak{t}_{\nu-1}$ bestimmten Umgebungen läßt sich nach dem Heine-Borelschen Theorem eine endliche Anzahl so auswählen, daß sie das ganze Intervall von $\mathfrak{t}_\nu$ bis $\mathfrak{t}_{\nu-1}$ überdecken. Diese mögen zu den Werten $\bar{\mathfrak{t}}_1, \bar{\mathfrak{t}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{t}}_m$ gehören; es ist $\mathfrak{t}_\nu \leqq \bar{\mathfrak{t}}_\mu \leqq \mathfrak{t}_{\nu-1}$. Diese Zwischenwerte denke man sich in allen Intervallen $\mathfrak{t}_\nu$ bis $\mathfrak{t}_{\nu-1}$ bestimmt. Es sei $\Psi(\mathfrak{t})$ das Minimum der endlich vielen zugehörigen Funktionen $\bar{\Psi}_\mu(\mathfrak{t})$ über den ganzen Kreis, das nach Hilfssatz 1 eine mit $P(\mathfrak{t}, \mathfrak{x})$ multiplizierte Oberfunktion ist. Es ist in jeder Umgebung $|\mathfrak{t} - \bar{\mathfrak{t}}_\mu| < \delta_\mu$

$$\Psi(\mathfrak{t}) \leqq \bar{\Psi}_\mu(\mathfrak{t}) < U(\bar{\mathfrak{t}}_\mu) + \varepsilon \leqq U(\mathfrak{t}_{\nu U}) + \varepsilon.$$

Die Bedingung

$$\Psi(\mathfrak{t}) < U(\mathfrak{t}_{\nu U}) + \varepsilon$$

gilt also im ganzen Intervall $\mathfrak{t}_\nu$ bis $\mathfrak{t}_{\nu+1}$, und zwar in allen Intervallen auf dem Kreise. Also ist auch in allen Intervallen

$$\Psi(\mathfrak{t}_{\nu\Psi}) \leqq U(\mathfrak{t}_{\nu U}) + \varepsilon. \tag{2}$$

Andererseits ist

$$\Psi(\mathfrak{t}_{\nu\Psi}) \geqq \Psi(\mathfrak{t}_{\nu U}) \geqq U(\mathfrak{t}_{\nu U}). \tag{3}$$

Aus (3) folgt, daß die untere Grenze aller Ausdrücke (1) für alle ψ größer oder gleich dem oberen im Riemannschen Sinne aufgefaßten

[1]) C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig 1918, S. 127 u. folg.

Poissonschen Integral über u sein muß; aus (2) folgt, daß die Differenz kleiner als jede vorgegebene Zahl ist, daß also Gleichheit bestehen muß. Es ist also

$$u(\mathfrak{x}) = \text{Untere Grenze der } M_K\,\psi(\mathfrak{x}) \tag{4}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\overline{\int_K} u(\mathfrak{k})\,P(\mathfrak{k},\mathfrak{x})\,d\vartheta = \overline{M}_K\,u(\mathfrak{x}).$$

Hierin seien $\int$ und $\overline{M}$ Zeichen des oberen Integrals im Riemannschen Sinne.

Es soll nunmehr gezeigt werden, daß $u(\mathfrak{x})$ eine stetige Funktion von $\mathfrak{x}$ ist. Da u nach oben und unten beschränkt ist, sei $u < M$. Es sei r der Radius des Kreises K, $\mathfrak{m}$ sein Mittelpunkt, ϱ sei eine festgewählte Zahl kleiner als 1. Für

$$|\mathfrak{k}-\mathfrak{m}| = r, \qquad |\mathfrak{x}-\mathfrak{m}| \leqq \varrho r \tag{5}$$

ist $P(\mathfrak{k},\mathfrak{x})$ eine mit Einschluß des Randes der Punktmenge (5) stetige, also gleichmäßig stetige Funktion der beiden Veränderlichen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{x}$. Also kann man $\delta > 0$ so klein bestimmen, daß, wenn

$$|\mathfrak{k}-\mathfrak{k}_1| < \delta, \tag{6}$$

$$|\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1| < \delta, \tag{6a}$$

im ganzen Gebiet (5)

$$|P(\mathfrak{k},\mathfrak{x}) - P(\mathfrak{k}_1,\mathfrak{x}_1)| < \frac{\varepsilon}{5M} \tag{7}$$

wird. Es seien $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ zwei Werte, die (6a) genügen. Man bestimme eine Intervalleinteilung, so daß

$$0 \leqq \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{n} u(\mathfrak{k}_{\nu U})\cdot P(\mathfrak{k}_{\nu U},\mathfrak{x})(\vartheta_{\nu+1}-\vartheta_\nu) - \frac{1}{2\pi}\int_K u(\mathfrak{k})\cdot P(\mathfrak{k},\mathfrak{x})\,d\vartheta < \frac{\varepsilon}{5}$$

oder mit Rücksicht auf (4)

$$0 \leqq \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{n} U(\mathfrak{k}_{\nu U})(\vartheta_{\nu+1}-\vartheta_\nu) - u(\mathfrak{x}) < \frac{\varepsilon}{5}. \tag{8}$$

$U(\mathfrak{k})$ gehe in $U_1(\mathfrak{k})$ über, wenn man $\mathfrak{x}$ durch $\mathfrak{x}_1$ ersetzt. Man bestimme ebenso eine Intervalleinteilung, so daß

$$0 \leqq \frac{1}{2\pi}\sum_{\mu=1}^{m} U_1(\mathfrak{k}_{\mu U_1})(\vartheta_{\mu+1}-\vartheta_\mu) - u(\mathfrak{x}_1) < \frac{\varepsilon}{5} \tag{9}$$

wird. Da die Maxima von Teilintervallen nicht größer sein können als die der ursprünglichen Intervalle, so bleiben die Bedingungen (8) und (9) erfüllt, wenn man die beiden Einteilungen (8) und (9) superponiert und

außerdem so ergänzt, daß $|\mathfrak{t}_{\nu+1} - \mathfrak{t}_\nu| < \delta$ wird, wobei jetzt $1 \leqq \nu \leqq n$ der Index für die neue Intervalleinteilung sei. Es bezeichne $\mathfrak{t}_{\nu u}$ eine Stelle, an der $u(\mathfrak{t})$ im Intervalle $\mathfrak{t}_\nu$ bis $\mathfrak{t}_{\nu+1}$ sein Maximum erreicht. Es ist

$$u(\mathfrak{t}_{\nu u}) \cdot P(\mathfrak{t}_{\nu u}, \mathfrak{x}) = U(\mathfrak{t}_{\nu u}) \leqq U(\mathfrak{t}_{\nu U}) = u(\mathfrak{t}_{\nu U}) \cdot P(\mathfrak{t}_{\nu U}, \mathfrak{x}) \leqq u(\mathfrak{t}_{\nu u}) \cdot P(\mathfrak{t}_{\nu U}, \mathfrak{x}),$$

also wegen (7)

$$0 \leqq U(\mathfrak{t}_{\nu U}) - U(\mathfrak{t}_{\nu u}) \leqq u(\mathfrak{t}_{\nu u}) \cdot (P(\mathfrak{t}_{\nu U}, \mathfrak{x}) - P(\mathfrak{t}_{\nu u}, \mathfrak{x})) < M \frac{\varepsilon}{5M} = \frac{\varepsilon}{5}$$

oder

$$|U(\mathfrak{t}_{\nu U}) - U(\mathfrak{t}_{\nu u})| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Es ist entsprechend

$$|U_1(\mathfrak{t}_{\nu U_1}) - U_1(\mathfrak{t}_{\nu u})| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Es ist ebenfalls wegen (7)

$$|U(\mathfrak{t}_{\nu u}) - U_1(\mathfrak{t}_{\nu u})| = |u(\mathfrak{t}_{\nu u}) \cdot P(\mathfrak{t}_{\nu u}, \mathfrak{x}) - P(\mathfrak{t}_{\nu u}, \mathfrak{x}_1)| < M \frac{\varepsilon}{5M} = \frac{\varepsilon}{5}.$$

Also ergibt sich

$$|U(\mathfrak{t}_{\nu U}) - U_1(\mathfrak{t}_{\nu U_1})| \leqq |U(\mathfrak{t}_{\nu U}) - U(\mathfrak{t}_{\nu u})| + |U(\mathfrak{t}_{\nu u}) - U_1(\mathfrak{t}_{\nu u}) + |U_1(\mathfrak{t}_{\nu u}) - U_1(\mathfrak{t}_{\nu U_1})| < \frac{3\varepsilon}{5}.$$

Bezeichnet man die linken Seiten von (8) und (9) mit $S - u(\mathfrak{x})$ bzw. $S_1 - u(\mathfrak{x}_1)$, so ergibt sich hieraus

$$|S - S_1| < \frac{2\pi}{2\pi} \frac{3\varepsilon}{5} = \frac{3\varepsilon}{5}.$$

Das liefert in Verbindung mit (8) und (9)

$$|u(\mathfrak{x}) - u(\mathfrak{x}_1)| \leqq |u(\mathfrak{x}) - S| + |S - S_1| + |S_1 - u(\mathfrak{x}_1)| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{3\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

Damit ist die Stetigkeit von $u(\mathfrak{x})$ im Kreise $|\mathfrak{x} - \mathfrak{m}| \leqq \varrho r$ bewiesen. Da jeder Punkt im gegebenen Gebiete im Innern eines Kreises im Gebiet liegt, so ist damit die Stetigkeit von $u(\mathfrak{x})$ im Innern des ganzen Gebietes bewiesen; das obere Integral in (4) ist also ein gewöhnliches Riemannsches Integral über eine stetige Funktion; also liegt ein gewöhnliches Poissonsches Integral vor. Mithin ist wegen (4)

$$u(\mathfrak{x}) = M_K u(\mathfrak{x}),$$

also u eine harmonische Funktion.

Damit haben wir das Ziel des § 3 der Perronschen Arbeit ohne Benutzung der Lebesgueschen Theorie erreicht und folgen ihr weiterhin von § 4 an, um durch geeignete Behandlung des Randes zur Lösung der ersten Randwertaufgabe zu gelangen.

(Eingegangen am 27. September 1923.)

Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik.

Von

H. Weyl in Zürich.

Neben solchen Arbeiten, die — in alle Richtungen sich zersplitternd und darum jeweils auch nur von wenigen mit lebhafterem Interesse verfolgt — in wissenschaftliches Neuland vorstoßen, haben wohl auch Betrachtungen wie die hier vorgelegten, in denen es sich weniger um Mehrung als um Klärung, um möglichst einfache und sachgemäße Fassung des schon Gewonnenen handelt, ihre Berechtigung, wenn sie sich auf Hauptprobleme richten, an denen alle Mathematiker, die überhaupt diesen Namen verdienen, ungefähr in gleicher Weise interessiert sind[1]).

[1]) Die Sammlung soll später fortgesetzt werden.

Daß ich ein Stück voranstelle, in welchem es um die symbolische Methode der Invariantentheorie geht, ist zum Teil durch Herrn Study veranlaßt, der mir — neben andern Ungenannten; ich allein bin durch ein Zitat aus meinen Schriften eindeutig gekennzeichnet — Schuld gibt, ein „reiches Kulturgebiet (nämlich die Invariantentheorie) der Verwahrlosung übergeben, ja dessen Dasein völlig ignoriert zu haben" (Einleitung in die Theorie der Invarianten linearer Transformationen, Braunschweig 1923; Einleitung). Herr Study hat Recht darin, daß ich, ein „*sonst* kenntnisreicher (?) Autor", in der Invariantentheorie geringe Literaturkenntnis und geringe eigene Erfahrung habe; aber auch dann, wenn ich hierin mit Herrn Study wetteifern könnte, würde ich in meinem Buche „Raum, Zeit, Materie" die symbolische Methode nicht angewendet und von den algebraischen Vollständigkeitssätzen der Invariantentheorie kein Sterbenswörtchen gesagt haben. Alles an seinem Platz! — Die hoch und tief gestellten Indizes sind in der Physik darum so praktisch, weil sie dieselbe Größe, z. B. die Energiedichte, mit demselben Buchstaben zu bezeichnen gestatten, ob sie nun durch ihre kovarianten oder kontravarianten Komponenten charakterisiert wird. — Was Graßmann als *Stufe* bezeichnet, trägt in der ganzen übrigen Mathematik den Namen *Dimension*; zudem stimmt ja die Bedeutung, welche ich diesem Wort in der Tensorrechnung beilegte, für den wichtigsten Spezialfall der schiefsymmetrischen („linearen") Tensoren mit dem Graßmannschen Gebrauch überein!

I. Zur Invariantentheorie.

1. Capellische Identität.

Den formalen Apparat der Invariantentheorie kann man aus der Identität von Capelli[2]) entwickeln. Für sie möchte ich hier zunächst einen durchsichtigen Beweis geben und dann einige Bemerkungen daran schließen über den auf sie sich stützenden Aufbau der Invariantentheorie für die projektive Gruppe und ihre wichtigsten Untergruppen. Neben der orthogonalen Gruppe, welche eine nicht-ausgeartete *symmetrische* Bilinearform invariant läßt, soll die „Komplexgruppe" behandelt werden, welche in dem gleichen Verhältnis zu einer *schiefsymmetrischen* Form steht.

Wir haben es zu tun mit mehreren Reihen $x, y \ldots$ („Vektoren") von je n Veränderlichen und einer ganzen rationalen Funktion f dieser Variablen. $D_{xx'}$ wie $\Delta_{xx'}$ bezeichnen den Polarenprozeß[3]):

$$f\Delta_{xx'} = fD_{xx'} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Dabei kann die Variablenreihe x' mit einer der Reihen $x, y, \ldots$ zusammenfallen oder auch eine weitere unabhängige Variablenreihe vorstellen. Es sollen aber Δ und D bei Zusammensetzungen sich verschieden verhalten: beispielsweise entstehe $fD_{xx'}D_{yy'}D_{zz'}$ aus f, indem man hintereinander die Operationen $D_{xx'}$, $D_{yy'}$, $D_{zz'}$ ausführt; hingegen sei

$$f\Delta_{xx'}\Delta_{yy'}\Delta_{zz'} = \sum_{ikl} x'_i y'_k z'_l \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial y_k \partial z_l}.$$

Die Resultate stimmen überein, außer wenn die Variablenreihe y oder z mit x' zusammenfällt oder $z = y'$ ist. Wir benutzen das Zeichen $\delta_{xx'} = 0$ oder 1, je nachdem x, x' zwei unabhängige oder zwei identische Variablenreihen sind. Es ist zu zeigen, daß die folgenden Gleichungen bestehen:

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} \Delta_{xx} \\ \Delta_{xy} \\ \Delta_{xz} \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_{xx} \\ D_{xy} \\ D_{xz} \\ \vdots \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \Delta_{xx} & \Delta_{yx} \\ \Delta_{xy} & \Delta_{yy} \\ \Delta_{xz} & \Delta_{yz} \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta_{xx} & D_{yx} \\ \Delta_{xy} & D_{yy} + 1 \\ \Delta_{xz} & D_{yz} \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} \Delta_{xx} & \Delta_{yx} & \Delta_{zx} \\ \Delta_{xy} & \Delta_{yy} & \Delta_{zy} \\ \Delta_{xz} & \Delta_{yz} & \Delta_{zz} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta_{xx} & \Delta_{yx} & D_{zx} \\ \Delta_{xy} & \Delta_{yy} & D_{zy} \\ \Delta_{xz} & \Delta_{yz} & D_{zz} + 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}, \ldots \end{array} \right.$$

[2]) Math. Annalen 29 (1887), S. 331.

[3]) Ich stelle die Operationssymbole hinter das Funktionszeichen, damit sie bei Zusammensetzung in derjenigen Reihenfolge hintereinander erscheinen, in der sie auszuführen sind.

Das ist so zu verstehen, daß in der i-ten Formel die entsprechenden i-reihigen Unterdeterminanten rechts und links übereinstimmen. Die i Faktoren jedes Determinantengliedes sind in der Reihenfolge der Spalten hinzuschreiben, denen sie entstammen. Indem man in jeder Formel das Resultat der vorhergehenden verwendet, gelangt man zu der Identität

$$\begin{vmatrix} \Delta_{xx} \Delta_{yx} \Delta_{zx} \dots \\ \Delta_{xy} \Delta_{yy} \Delta_{zy} \dots \\ \Delta_{xz} \Delta_{yz} \Delta_{zz} \dots \end{vmatrix} = \begin{matrix} D_{xx} D_{yx} & D_{zx} & \dots \\ D_{xy} D_{yy} + 1 & D_{zy} & \dots \\ D_{xz} D_{yz} & D_{zz} + 2 & \dots \end{matrix} .$$

Die m-reihige Operatorendeterminante links liefert, auf f angewendet, 0, wenn die Anzahl m der zur Verwendung kommenden Variablenreihen $x, y, z, \dots$ größer als n ist. Im Falle $m = n$ aber kommt, nach dem Multiplikationssatz der Determinanten, das Produkt aus der Determinante $(x y z \dots)$ und Ωf (Ω bezeichnet den Cayleyschen Ω-Prozeß).

Um z. B. die dritte der Gleichungen (1) zu gewinnen, haben wir

$$\begin{vmatrix} \Delta_{xx'} & \Delta_{yx'} & D_{zx'} \\ \Delta_{xy'} & \Delta_{yy'} & D_{zy'} \\ \Delta_{xz'} & \Delta_{yz'} & D_{zz'} \end{vmatrix} = \Sigma \pm \Delta_{xx'} \Delta_{yy'} D_{zz'}$$

zu berechnen. x, y, z und ebenso x', y', z' sind voneinander unabhängige Variablenreihen, während die gestrichenen von den ungestrichenen nicht verschieden zu sein brauchen. Die Summe rechts bezieht sich auf die $3!$ Permutationen von $x' y' z'$ mit alternierenden Vorzeichen. Es ist

$$f \Delta_{xx'} \Delta_{yy'} D_{zz'} = \sum_l z'_l \frac{\partial}{\partial z_l} \Big(\sum_{ik} x'_i y'_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_k} \Big)$$
$$= f \Delta_{xx'} \Delta_{yy'} \Delta_{zz'} + \delta_{zx'} \cdot f \Delta_{xz'} \Delta_{yy'} + \delta_{zy'} \cdot f \Delta_{xx'} \Delta_{yz'},$$

also

$$\Delta_{xx'} \Delta_{yy'} D_{zz'} = \Delta_{xx'} \Delta_{yy'} \Delta_{zz'} + \Delta_{xz'} \Delta_{yy'} \delta_{zx'} + \Delta_{xx'} \Delta_{yz'} \delta_{zy'} .$$

Bei der Summation über die $3!$ Permutationen von $x' y' z'$ kann man im 2. Glied (unter Änderung des Vorzeichens) z' mit x', im 3. Glied z' mit y' vertauschen und erhält

$$\Sigma \pm \Delta_{xx'} \Delta_{yy'} D_{zz'} = \Sigma \pm \Delta_{xx'} \Delta_{yy'} \Delta_{zz'} - 2 \Sigma \pm \Delta_{xx'} \Delta_{yy'} \delta_{zz'}$$

oder, wenn das subtraktive Glied auf die andere Seite geschafft wird,

$$\begin{vmatrix} \Delta_{xx'} \Delta_{yx'} \Delta_{zx'} \\ \Delta_{xy'} \Delta_{yy'} \Delta_{zy'} \\ \Delta_{xz'} \Delta_{yz'} \Delta_{zz'} \end{vmatrix} = \begin{matrix} \Delta_{xx'} \Delta_{yx'} D_{zx'} + 2 \delta_{zx'} \\ \Delta_{xy'} \Delta_{yy'} D_{zy'} + 2 \delta_{zy'} \\ \Delta_{xz'} \Delta_{yz'} D_{zz'} + 2 \delta_{zz'} \end{matrix} , \text{ q. e. d.}$$

2. Reduktion auf $n-1$ Vektoren.

Es sei $\mathfrak{H}$ eine Gruppe linearer homogener Transformationen in n Variablen. Unter (Vektor-) *Invariante* zu $\mathfrak{H}$ versteht man bekanntlich eine ganze rationale Funktion f mehrerer Vektoren $x, y, \ldots$, homogen in den Komponenten jedes einzelnen Vektors, die sich höchstens mit einem Faktor μ multipliziert, wenn man auf die Komponenten jedes Vektors dieselbe Transformation S von $\mathfrak{H}$ ausübt; μ soll nicht von den Vektoren, sondern nur von S abhängen. Ist μ insbesondere für alle Transformationen S von $\mathfrak{H}$ gleich 1, so spricht man von einer absoluten Invariante. Die Aufgabe ist, bestimmte Typen von Grundinvarianten ausfindig zu machen, durch welche sich alle Invarianten der Gruppe $\mathfrak{H}$ ganz rational ausdrücken. Einen wesentlichen Schritt zur Lösung dieses Problems ermöglicht die eben von neuem bewiesene Capellische Formel

$$f\begin{vmatrix} D_{x,x} & D_{y,x} & \ldots \\ D_{x,y} & D_{y,y}+1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 & (m>n) \quad (C') \\ (xy\ldots)\,\Omega f & (m=n); \quad (C) \end{cases} \tag{2}$$

sie reduziert es nämlich auf den Fall, daß f nur von n, bzw. $n-1$ Vektoren abhängt. Bei der ersten Reduktion, die sich auf die Formel (C') stützt, muß nur angenommen werden, daß

(I) *durch Anwendung des Polarenprozesses aus einer Grundinvariante wiederum ein Aggregat von Grundinvarianten entsteht*:

bei der zweiten Reduktion, die sich auf (C) stützt, ist weiter zu fordern, daß

(II) *die Determinante* $(xy\ldots)$ *unter den Grundinvarianten vorkommt* (oder sich doch ganz rational durch sie darstellen läßt).

Man denke sich die in f wirklich vorkommenden Vektoren in bestimmter Reihenfolge $x, y, z, \ldots$ angeordnet, und nenne von zwei Funktionen f dieser Vektoren, wenn sie gleiche Gesamtordnung haben, diejenige die niedrigere, welche in x von geringerer Ordnung ist; wenn aber beide dieselbe Ordnung in x besitzen, soll die Ordnung in y über den Rang entscheiden; wenn die Ordnung in x und y übereinstimmt, geht die Entscheidung auf z über; usf. Das Hauptglied in der Capellischen Determinante (2) ist $\pm p(q+1)(r+2)\ldots f$, wenn $p, q, r, \ldots$ die Ordnungen von f in x, bzw. $y, z, \ldots$ bezeichnen. Alle andern Glieder entstehen durch Anwendung von Polarprozessen aus solchen Invarianten, die niedriger als f stehen. Wissen wir von solchen Invarianten schon, daß sie sich durch die Grundinvarianten ausdrücken, so folgt demnach aus (C') das gleiche für f. Bei der Anwendung von (C) hat man dem Induktionsschluß noch die Annahme zugrunde zu legen, daß die Behauptung schon feststehe für Invarianten von geringerer Gesamtordnung als f, wie Ωf

eine ist. — So, wie hier geschehen, trennt man meiner Meinung nach am besten den formal-algebraischen und den mit gedanklichen Induktionsschlüssen operierenden Teil. Denn die Capellische Identität ist im Gegensatz zu den sonst daraus hergeleiteten Reihenentwicklungen eine übersichtliche, explizite anschreibbare und geschlossene Formel. Da die Weiterführung des Problems bisher nur für einzelne Gruppen $\mathfrak{H}$ gelungen ist, wird man diesem auf den beiden Formeln (2) beruhenden Konstruktionsstück, das für alle brauchbar ist, einen besonders hohen Wert zuschreiben.

3. Der Transformationsfaktor.

Will man weiterkommen, so muß man sich zunächst über den Transformationsfaktor $\mu = \mu(S)$ Klarheit verschaffen. Sind S, T irgend zwei Transformationen aus $\mathfrak{H}$, so gilt

$$(3) \qquad \mu(ST) = \mu(S)\cdot\mu(T), \quad \text{insbesondere} \quad \mu(S)\cdot\mu(S^{-1}) = 1.$$

Es ist bekannt, wie man aus der letzten Gleichung die Tatsache herleitet, daß für die volle projektive Gruppe $\mathfrak{G}$ der Faktor μ eine Potenz der Transformationsdeterminante ist. Allgemeiner: Ist $\mathfrak{H}$ dadurch definiert, daß die Transformationskoeffizienten gleich ganzen rationalen Funktionen unabhängiger Parameter gesetzt werden, und bleibt dabei die Determinante eine irreduzible Funktion dieser Parameter, so ist μ notwendig eine Potenz der Determinante. Ist insbesondere $\mathfrak{H} = \mathfrak{T}$ die Translationsgruppe im n-dimensionalen Raum, bestehend aus den Translationen

$$(4) \qquad S: \ \bar{x}_0 = x_0 + (c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n), \quad \bar{x}_i = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

— die x_i bedeuten hier Ebenenkoordinaten, x ist ein „kovarianter Vektor"; die c sind beliebige Konstanten —, so erhält man aus jener Gleichung

$$\mu(c_1, \ldots, c_n)\cdot\mu(-c_1, \ldots, -c_n) = 1.$$

Als Polynom in den Variablen $c_1, \ldots, c_n$ ist darum μ eine Konstante und zwar $= 1$, weil für die Identität $\mu = 1$ ist.

In dem komplizierteren Fall, wo die Gruppe durch Relationen zwischen den Transformationskoeffizienten gegeben ist — das ist vor allem so für die orthogonale Gruppe $\mathfrak{D}$ —, wird man am besten zur Methode der infinitesimalen Operationen greifen. Ist $\Gamma = (\gamma_{ik})$ die Abweichung der allgemeinen infinitesimalen Operation der Gruppe $\mathfrak{H}$ von der Identität und $\mu = 1 + \varphi(\Gamma)$ der zugehörige Faktor, so bestehen zwischen den γ lediglich *lineare* homogene Relationen und φ ist eine *lineare* homogene Funktion von Γ. An Stelle der Bedingung (3) tritt die, daß φ den Wert 0 hat für jede Operation der „abgeleiteten Gruppe", d. h. für die Matrizen Γ',

die aus zwei Matrizen der infinitesimalen Gruppe, etwa Γ_1, Γ_2, nach der Formel entstehen

$$\Gamma' = [\Gamma_1 \Gamma_2] = \Gamma_1 \Gamma_2 - \Gamma_2 \Gamma_1,$$

und für alle diejenigen, die sich aus solchen Γ' linear zusammensetzen. Insbesondere geht daraus hervor: *Ist die zu $\mathfrak{H}$ gehörige infinitesimale Gruppe $\mathfrak{h}$ mit ihrer abgeleiteten identisch, so ist $\mu = 1$* — zum mindesten für alle der „Hauptschicht" von $\mathfrak{H}$ angehörigen Transformationen (das sind diejenigen, welche innerhalb $\mathfrak{H}$ mit der Identität in einem gemeinsamen zusammenhängenden Kontinuum liegen). Der wichtigste Fall dieses allgemeinen Satzes ist der auf $\mathfrak{D}$ bezügliche: *Für die orthogonale Gruppe gibt es nur absolute Invarianten; ausgenommen $n = 2$.* (Die Ausnahme fällt fort, wenn der zugrunde liegende Zahlbereich $\sqrt{-1}$ nicht enthält.) Dies gilt wörtlich, wenn wir zu $\mathfrak{D}$ nur die eigentlichen orthogonalen Transformationen, die Drehungen mit der Determinante $+1$ rechnen. Wenn auch die Spiegelungen mit der Determinante -1 dazu gehören, kann für die Spiegelungen $\mu = +1$ oder $= -1$ sein; je nachdem das eine oder das andere der Fall ist, sprechen wir von einer geraden oder einer ungeraden Invariante. Ist von einer Funktion f nur bekannt, daß sie sich den Drehungen gegenüber invariant verhält, so ist sie die Summe einer geraden und einer ungeraden Invariante.

4. Aufstellung der Grundinvarianten für die wichtigsten linearen Gruppen.

Drehungsgruppe. Für die orthogonale Gruppe $\mathfrak{D}$ kommt man aus mit den Grundinvarianten

$$(D_1) \qquad (x\,y\,z\ldots) \qquad \text{und} \qquad (D_2) \qquad (x\,|\,y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n .$$

Das wurde zuerst durch eine sehr schöne, auf die Gruppe $\mathfrak{D}$ zugeschnittene Methode durch E. Study gezeigt[4]). Da das Produkt zweier Determinanten (D_1) sich durch die skalaren Produkte vom Typus (D_2) ausdrücken läßt, kann man schärfer sagen: Eine gerade Invariante kann ganz rational dargestellt werden allein durch (D_2); eine ungerade Invariante ist die Summe mehrerer Terme, deren jeder das Produkt aus einem „Klammerfaktor" (D_1) und einer geraden Invariante ist. Für dieses Theorem hat auf dem hier begonnenen Wege, nachdem Burkhardt mit $n = 3$ vorangegangen war[5]), Herr Weitzenböck in seinem Buche „Invariantentheorie" (Groningen 1923) einen Beweis versucht, der aber wegen eines Fehlschlusses — Übergang zu (17) und (18) auf S. 244 — nicht stichhaltig ist. In den Anwendungen interessieren fast ausschließlich die absoluten Invarianten. Faßt man den

[4]) Leipziger Berichte 1897, S. 443—461.
[5]) Math. Annalen **43** (1893), S. 197—215.

Invariantenbegriff allgemeiner, so muß man zunächst wie im vorigen Absatz zeigen, daß zur Drehungsgruppe keine andern als absolute Invarianten gehören. Dann kommt man aber durch einen Schluß von $n-1$ auf n folgendermaßen sofort zum Ziel. Die absolute Invariante f hänge von höchstens $n-1$ Vektoren $x, y, \ldots$ ab. Bei gegebenen Vektoren $x, y, \ldots$ kann man dann ein dem ursprünglichen gleichsinniges Cartesisches Koordinatensystem $e^1, e^2, \ldots, e^n$ einführen, in welchem e^n zu jenen Vektoren senkrecht ist. Wird

$$x = x_1' e^1 + x_2' e^2 + \ldots + x_{n-1}' e^{n-1}, \quad \ldots \tag{5}$$

gesetzt, so kommt

$$f(x, y, \ldots) = f_0(x', y', \ldots), \tag{6}$$

wo f_0 diejenige Funktion bedeutet, die aus f durch die Substitution $x_n = y_n = \ldots = 0$ entsteht. War f eine ungerade Invariante, so erhält man durch Transformation auf das Koordinatensystem $e^1, \ldots, e^{n-1}, -e^n$ neben (6) die Gleichung

$$f(x, y, \ldots) = -f_0(x', y', \ldots),$$

und darum ist $f = 0$. War aber f eine gerade Invariante, so ist $f_0(x', y', \ldots)$ bei frei veränderlichen Argumenten

$$x' = (x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}'), \quad \ldots$$

eine gerade Orthogonalinvariante in $n-1$ Dimensionen. Setzen wir unsern Satz für $n-1$ Dimensionen schon als gültig voraus, so können wir mithin f_0 ganz rational darstellen durch die skalaren Produkte vom Typus $(x' \mid y') = x_1' y_1' + \ldots + x_{n-1}' y_{n-1}'$:

$$f_0(x', y', \ldots) = \Phi(\ldots, (x' \mid y'), \ldots). \tag{7}$$

Wenden wir das an auf die durch (5) eingeführten Größen $x', \ldots$ und beachten, daß für sie $(x' \mid y') = (x \mid y)$ ist, so erhält man aus (7) die gewünschte Darstellung

$$f(x, y, \ldots) = \Phi(\ldots, (x \mid y), \ldots).$$

Am besten ordnet man danach den Beweis so an. f_n bedeute eine gerade oder ungerade Orthogonalinvariante in n Dimensionen, die von höchstens n Vektoren $x, y, \ldots$ abhängt; Φ bezeichne ein Aggregat der skalaren Produkte dieser Vektoren. Durch einen auf die Dimensionszahl n bezogenen Induktionsschluß beweist man T_n: „Jedes gerade f_n ist $= \Phi$, jedes ungerade $f_n = (x\,y\ldots)\,\Phi$“. T_0 ist trivial; aus T_{n-1} folgt T_n. T_n folgt nämlich zunächst, wie oben gezeigt, für solche f_n, die höchstens $n-1$ Argumentvektoren enthalten. Die Übertragung auf n Argumente geschieht mit Hilfe der Capellischen Formel (C). Der Polarenprozeß

verwandelt gerade in gerade, ungerade in ungerade Invarianten, während der Ω-Prozeß gerade und ungerade vertauscht. Bei Anwendung von (C) auf ein gerades f_n hat man noch, wenn auf der rechten Seite Ωf_n schon in der Form $(xy\ldots)\,\Phi$ dargestellt ist, den Ausdruck von $(xy\ldots)^2$ durch die skalaren Produkte zu benutzen. *Nachdem* T_n bewiesen ist, leitet man aus (C′), ohne den n dimensionalen Raum zu verlassen, den allgemeinen Satz her: Jede gerade Orthogonalinvariante ist $= \Phi$, jede ungerade gleich einer Summe von Termen des Typus $(xy\ldots)\,\Phi$. — Weder bei dem Studyschen noch bei diesem Verfahren braucht der von Burkhardt verwendete raffinierte Kunstgriff[6]) herangezogen zu werden.

Erweiterungssatz. Die *Bewegungsgruppe* $\mathfrak{B}$ ist für Ebenenkoordinaten $x_0 | x_1 x_2 \ldots x_n$ dadurch gegeben, daß der vektorielle Bestandteil $x_1 x_2 \ldots x_n$ einer willkürlichen orthogonalen Transformation unterliegt, der skalare x_0 ersetzt wird durch

$$\bar{x}_0 = x_0 + (c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n) \qquad \text{(die } c \text{ beliebige Konstante).} \tag{8}$$

Nach dem, was über die orthogonale Gruppe und die Translationen (4) bemerkt wurde, existieren auch zu $\mathfrak{B}$ nur absolute Invarianten. Bedeutet l das Wertsystem $1 | 0\,0 \ldots 0$, so erscheinen als Grundinvarianten die drei Typen:

$$(x|y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n, \qquad (xyz\ldots), \qquad (lxy\ldots) \tag{B}$$

(die Klammerfaktoren enthalten $n+1$ Glieder). Hier führt der gleiche Induktionsschluß — als Ersatz für das von Weitzenböck eingeschlagene Verfahren[7]) — zum Ziel. Hängt die Invariante f von höchstens n „Ebenen“ $x, y, \ldots$ ab, so kann man (zunächst unter der Einschränkung, daß ihre vektoriellen Bestandteile linear unabhängig sind) durch eine Translation (4), bei welcher f sich nicht ändert, erzwingen, daß ihre skalaren Bestandteile $x_0, y_0, \ldots$ alle verschwinden, — der Anfangspunkt des Koordinatensystems wird in den Schnitt der Ebenen verlegt. Nach dem Fundamentalsatz für $\mathfrak{D}$ drückt sich dann f ganz und rational aus durch $(lxy\ldots)$ und Grundinvarianten vom Typus $(x|y)$. Das gleiche Verfahren empfiehlt sich beim Übergang von der projektiven zur *affinen Gruppe*[8]), bei den *Semi- und Schiebungsinvarianten*[9]). Der allgemeine Satz, der hier sich ergibt (Erweiterungssatz), lautet: *Einer Gruppe* $\mathfrak{H}$ *von projektiven Trans-*

[6]) A. a. O., S. 201. Vgl. Weitzenböck, Invariantentheorie, S. 240.

[7]) Wiener Berichte, Abt. IIa, 122 (1913), S. 1255; Invariantentheorie, S. 277.

[8]) Weitzenböck, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinig. 22 (1913), S. 192—209; Invariantentheorie, S. 223—232.

[9]) J. Deruyts, Essai d'une théorie générale des formes algébriques. Lüttich 1890.

formationen in n Variablen entspricht die Gruppe $\mathfrak{H}_\nu$ *in* $\nu + n$ *Variablen* $x = (\xi_1, \ldots, \xi_\nu, x_1, \ldots, x_n)$, *welche definiert ist durch die Gleichungen*

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}_1 &= (\gamma_{11}\xi_1 + \ldots + \gamma_{1\nu}\xi_\nu) + (c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\bar{\xi}_\nu &= (\gamma_{\nu 1}\xi_1 + \ldots + \gamma_{\nu\nu}\xi_\nu) + (c_{\nu 1}x_1 + \ldots + c_{\nu n}x_n)
\end{aligned}$$

zusammen mit der Festsetzung, daß $x_1, \ldots, x_n$ *unter sich eine beliebige Transformation aus* $\mathfrak{H}$ *erleiden können; die c und* γ *sind willkürlich mit der einen Einschränkung, daß die Determinante der* γ *gleich* 1 (*bzw.* $\neq 0$) *ist. Ein System von Grundinvarianten für* $\mathfrak{H}_\nu$ *wird alsdann gebildet aus den Grundinvarianten von* $\mathfrak{H}$ *zusammen mit der* $(\nu + n)$*-gliedrigen Determinante* $(x\,y\,z\ldots)$.

Beweis. Wieder können wir uns beschränken auf Invarianten f der Gruppe $\mathfrak{H}_\nu$, die von weniger als $\nu + n$ Vektoren $x, y, \ldots$ abhängen. Durch eine Translation

$$(9)\qquad \bar{\xi}_1 = \xi_1 - \gamma_{12}\xi_2 - \ldots - c_{1n}x_n \quad (\text{alle übrigen Variablen gehen in sich über})$$

können wir dann bei gegebenen $x, y, \ldots$ bewirken, daß die erste griechische Komponente aller dieser Vektoren verschwindet. Weil die Translationen (9) zu $\mathfrak{H}_\nu$ gehören und nach einer obigen Bemerkung der zugehörige Faktor $\mu = 1$ ist, ändert sich f also nicht, wenn in ihm $\xi_1, \eta_1, \ldots$ durch 0 ersetzt werden. Das heißt: in f kommt die erste griechische Komponente von $x, y, \ldots$ gar nicht vor; ebensowenig die 2-te bis ν-te. f enthält demnach nur die lateinischen Variablen und ist als Invariante der Gruppe $\mathfrak{H}$ durch deren Grundinvarianten darstellbar.

Die *volle projektive Gruppe* $\mathfrak{G}$, ebenso die Gruppe aller homogenen linearen Transformationen *von der Determinante* 1 fällt unter diesen Beweis. Der Erweiterungssatz liefert ferner die Grundinvarianten für die *Gruppe der „gestuften" Transformationen*; man erhält sie, wenn man die Variablenreihe in eine Anzahl Abschnitte, sagen wir in drei Abschnitte x_1, x_2, x_3 teilt und nun ansetzt

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3,\\
\bar{x}_2 &= \qquad c_{22}x_2 + c_{23}x_3,\\
\bar{x}_3 &= \qquad\qquad c_{33}x_3
\end{aligned}$$

mit willkürlichen Matrizen c, die nur der einen Einschränkung genügen, daß die in der Hauptdiagonale stehenden die Determinante 1 (bzw. eine von 0 verschiedene Determinante) besitzen. Geometrisch handelt es sich hier um diejenigen projektiven Transformationen, welche ein System inzidenter linearer Elemente verschiedener Stufenzahl festlassen (Verallgemeinerung der Semiinvarianten; die Stufenzahlen brauchen nicht die lückenlose Reihe $0, 1, \ldots, n-1$ zu bilden).

Wie die Tabelle der Grundinvarianten zu ergänzen ist, wenn neben den kovarianten auch kontravariante Vektoren in Betracht gezogen werden, lehrt die Weitzenböcksche Methode der Komplexsymbole. Insbesondere hat Herr Weitzenböck das große Verdienst, in diesem allgemeineren Fall für die Gruppe $\mathfrak{B}$ der Elementargeometrie bei beliebiger Dimensionszahl jene Tabelle vollständig aufgestellt zu haben[10]).

Komplexgruppe. Von den wichtigsten linearen Gruppen hat bisher meines Wissens diejenige noch keine Bearbeitung gefunden, welche einen nicht-singulären linearen Geradenkomplex in sich überführt. Dennoch ist es mit den vorliegenden Mitteln leicht möglich, auch für sie die Grundinvarianten aufzustellen; in gewissem Sinne ist hier die Theorie noch einfacher als bei der orthogonalen Gruppe. Die Komponenten eines Vektors x im Raume von $n = 2h$ Dimensionen wollen wir mit $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_h, y_h$ bezeichnen. Zugrunde liegt eine nicht-ausgeartete schiefsymmetrische Bilinearform in normaler Darstellung

$$[xx'] = (x_1 y_1' - y_1 x_1') + \ldots + (x_h y_h' - y_h x_h') \tag{10}$$

(„schiefes Produkt" von x und x'). Die Gruppe $\mathfrak{G}$ besteht aus allen homogenen linearen Transformationen, welche, auf x und x' simultan angewendet, die Form $[xx']$ ungeändert lassen. *Als einzige Grundinvariante von $\mathfrak{G}$ tritt diese Form selber auf.* Der Beweis stützt sich auf die folgenden Tatsachen.

1. Die zugehörige Gruppe $\mathfrak{c}$ der infinitesimalen Operationen stimmt mit ihrer abgeleiteten $\mathfrak{c}'$ überein. Außerdem besteht $\mathfrak{G}$ aus einer einzigen zusammenhängenden Schicht. Infolgedessen können keine anderen als absolute Invarianten existieren.

2. Ist $b = b^1$ ein beliebiger von 0 verschiedener Vektor, so läßt sich dazu ein Koordinatensystem konstruieren: $a^1, b^1; a^2, b^2; \ldots; a^h, b^h$, in welchem das schiefe Produkt die Normalform (10) besitzt. — Hängt die Invariante f von weniger als n Vektoren $x, x', \ldots$ ab, so können wir bei gegebenen $x, x', \ldots$ hier b so wählen, daß $[bx] = [bx'] = \ldots = 0$ ist. Setzen wir dann

$$x = (\xi_1 a^1 + \eta_1 b^1) + \ldots + (\xi_h a^h + \eta_h b^h), \tag{11}$$

entsprechend für $x', \ldots,$

so wird $\xi_1 = \xi_1' = \ldots = 0$; und es gilt

$$f(x, x', \ldots) = f(\xi, \xi', \ldots). \tag{12}$$

[10]) Über Bewegungsinvarianten, 1. bis 15. Mitteilung, Wiener Berichte, Abt. IIa, 122 ff. (ab 1913); ders., Invariantentheorie, S. 281—301.

3. Zu $\mathfrak{G}$ gehören die unimodularen Transformationen des Variablenpaares x_1, y_1 (bei welchen die übrigen Variablen ungeändert bleiben):

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \bar{y}_1 &= \gamma x_1 + \delta y_1 \end{aligned} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1). \tag{13}$$

Nach dem Fundamentalsatz für diese zweidimensionale Gruppe ist f eine ganze rationale Funktion der Determinanten vom Typus $(xx')_1 = x_1 y_1' - y_1 x_1'$. Die Funktion f_0, welche aus f durch die Substitution $x_1 = x_1' = \ldots = 0$ entsteht, enthält also auch die Variablen $y_1, y_1', \ldots$ nicht mehr. Oder in mehr elementarer Schlußweise: Aus der Invarianz von f gegenüber (13) folgt

$$f(0, y_1; 0, y_1'; \ldots) = f(\beta y_1, \delta y_1; \beta y_1', \delta y_1'; \ldots)$$

(wobei nur das erste Variablenpaar in Evidenz gesetzt wurde). Diese Gleichung ist numerisch richtig für beliebige Zahlen $(\beta, \delta) \neq (0, 0)$. Infolgedessen liegt eine algebraische Identität in den Variablen β, δ vor, und ich darf in ihr auch $\beta = \delta = 0$ setzen. — Die numerische Gleichung (12) kann daraufhin, mit der abgeänderten Bezeichnung

$$\xi = (\xi_2 \eta_2, \ldots, \xi_h \eta_h), \quad \xi' = (\xi_2' \eta_2', \ldots, \xi_h' \eta_h'), \quad \ldots, \tag{14}$$

so geschrieben werden:

$$f(x, x', \ldots) = f_0(\xi, \xi', \ldots). \tag{15}$$

$f_0(\xi, \xi', \ldots)$ ist bei frei veränderlichen Argumenten (14) eine Komplexinvariante in $2(h-1)$ Dimensionen. Ist für diese Dimensionszahl unser Satz schon als richtig erkannt, so läßt sich f_0 also ganz rational ausdrücken durch die schiefen Produkte vom Typus

$$[\xi\xi'] = (\xi_2\eta_2' - \eta_2\xi_2') + \ldots + (\xi_h\eta_h' - \eta_h\xi_h'):$$
$$f_0(\xi, \xi', \ldots) = \Phi(\ldots, [\xi\xi'], \ldots).$$

Für die besonderen durch (11) eingeführten Wertsysteme folgt dann aus (15) und $[xx'] = [\xi\xi']$ die behauptete Darstellung von f.

4. Um nun aber den Induktionsschluß zu beenden und in n Dimensionen mit Hilfe der Capellischen Identität von weniger als n zu einer beliebigen Anzahl von Argumenten überzugehen, brauchen wir noch den Satz: Die Determinante $(x'x''\ldots x^{(n)})$ von n Vektoren $x', x'', \ldots, x^{(n)}$ drückt sich ganz rational durch ihre schiefen Produkte zu je zweien aus (als ein sog. Pfaffsches Aggregat):

$$(x'x''\ldots x^{(n)}) = \frac{1}{2\cdot 4\ldots 2h} \sum' \pm [x'x''][x'''x''''] \ldots [x^{(n-1)}x^{(n)}].$$

In dem Produkt, das rechts unter dem Summenzeichen auftritt, sollen die n Vektoren sämtlichen Permutationen unterworfen werden; alle $n!$ Terme sind darauf mit alternierenden Vorzeichen zu addieren.

Zieht man neben kovarianten auch kontravariante Vektoren

$$u = (u^1, v^1, u^2, v^2, \ldots, u^h, v^h)$$

in Betracht, so erledigt sich die Aufstellung der Grundinvarianten durch die einfache Bemerkung, daß mit jedem solchen Vektor u ein kovarianter verbunden ist durch die Gleichungen

$$x_i = v^i, \quad y_i = -u^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, h).$$

Die sich ergebenden Typen sind

$$[xx'], \quad (xu), \quad [uu'].$$

II. Fundamentalsatz der Algebra und Grundlagen der Mathematik.

Der Fundamentalsatz der Algebra ist oft genug behandelt worden; keiner der bekannten Beweise genügt aber den Anforderungen, welche die Brouwersche Analysis an einen strengen Existenzbeweis stellt[11]). Ich möchte zunächst an diesem Beispiel zeigen, wie jene von seiten der Logik geltend gemachten Ansprüche mit denen der Praxis genau zusammenfallen, und dann einige allgemeine Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik anschließen, welche durch die anders gerichteten Hilbertschen Untersuchungen auf diesem Gebiet hervorgerufen sind.

Die Aufgabe ist: wenn die Koeffizienten der Gleichung

$$(1) \qquad y = f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

approximativ gegeben sind, die Wurzeln angenähert zu bestimmen — in solcher Weise, daß die Genauigkeit der Wurzelbestimmung mit unbegrenzt wachsender Genauigkeit der Koeffizienten gleichfalls schließlich jeden Grad überschreitet. Bei solcher Fassung schließt die Existenz der Wurzeln offenbar ihre stetige Abhängigkeit von den Koeffizienten ein.

Wir bedecken die komplexe x-Ebene mit dem quadratischen Raster von der Maschenweite $\frac{1}{2^h}$; die Teilungslinien sind diejenigen, auf denen der Realteil oder der Imaginärteil von x ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{2^h}$ ist. Die Quadrate des Rasters nennen wir die Dualquadrate h-ter Ordnung; ein „Dualstern“ h-ter Ordnung ist das Quadrat von der Seitenlänge $\frac{1}{2^{h-1}}$, das gebildet wird von den vier Dualquadraten h-ter Ordnung, die um einen Eckpunkt des Rasters herumliegen. Entsprechend dem Übergang zu immer verschärfter Genauigkeit durchlaufe h die Folge der Werte

[11]) Vgl. darüber Weyl, Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. Math. Zeitschr. **10** (1921), S. 39.

$0, 1, 2, \ldots$. Auf der h-ten Stufe seien die Koeffizienten mit solcher Genauigkeit bekannt, daß für jeden von ihnen mit Sicherheit ein Dualstern h-ter Ordnung in der komplexen Ebene angewiesen werden kann, in welchem er liegt. Man kann auch statt der einzelnen Koeffizienten gleich das ganze System $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ als Punkt in einem $2n$-dimensionalen Zahlenraum ins Auge fassen; dann ist in ihm ein Dualstern h-ter Ordnung $A = A_h$ bekannt, welchem der Koeffizientenpunkt sicher angehört. — Schon auf der 0-ten Stufe der Approximation können wir eine ganze Zahl m angeben, daß alle Wurzeln der Gleichung innerhalb des im Nullpunkt zentrierten Quadrats $\mathfrak{Q}$ von der Seitenlänge $2m$ liegen. Wir gehen nun zunächst genau nach dem Muster desjenigen Beweises vor, der mit Weierstraß in dem von Stufe zu Stufe feiner werdenden Quadratraster der x-Ebene ein Minimum des absoluten Betrages $|f(x)|$ abzufangen sucht.

Bei der Genauigkeit, mit welcher die Koeffizienten auf der h-ten Stufe bekannt sind, kann ich zu jedem Dualquadrat h-ter Ordnung $\mathfrak{q}_x$ der x-Ebene, welches zu $\mathfrak{Q}$ gehört, ein Quadrat $\mathfrak{q}_y$ in der y-Ebene angeben, in welchem die Werte y meines Polynoms gelegen sind, wenn x in $\mathfrak{q}_x$ variiert; $\mathfrak{q}_y$ soll ein Quadrat sein, das aus lauter Dualquadraten h-ter Ordnung zusammengesetzt ist. Enthält $\mathfrak{q}_y$ den Nullpunkt der y-Ebene (eines der vier um den Nullpunkt herumliegenden Dualquadrate h-ter Ordnung), so nennen wir $\mathfrak{q}_x$ ein *nullstellen-verdächtiges Quadrat*. Diese Prüfung kann für jedes der endlichvielen Quadrate $\mathfrak{q}_x$, aus denen $\mathfrak{Q}$ besteht, vorgenommen werden. Ein verdächtiges Quadrat $\mathfrak{q}_x$ wird man als approximative Bestimmung einer Wurzel betrachten wollen. Geht man nun aber zur nächsten Genauigkeitsstufe $(h + 1)$ über, so kann es sich natürlich ereignen, daß sich von den vier Dualquadraten $(h + 1)$-ter Ordnung, in welche $\mathfrak{q}_x$ zerfallen ist, keines mehr als nullstellen-verdächtig ergibt: wir werden aus $\mathfrak{q}_x$ vertrieben und müssen anderswo unser Heil versuchen. So können wir von Stufe zu Stufe in dem ganzen Quadrat $\mathfrak{Q}$ herumgetrieben werden, ohne irgendwo zur Ruhe zu kommen und uns einem festen Wurzelwert anzunähern. Dies ist die Hauptschwierigkeit, welche überwunden werden muß; bei der üblichen Gedankenführung wird hier der Sprung ins Jenseits durch den Existentialabsolutismus vollzogen.

Nötig ist offenbar ein Kriterium, das schon auf der h-ten Stufe darüber entscheidet, ob man bei fortgesetzter Teilung und beliebig fortschreitender genauerer Festlegung der Koeffizienten in $\mathfrak{q}_x$ immer wieder nullstellen-verdächtige Quadrate antreffen wird oder nicht. Es ist eine wunderbare Tatsache, daß ein solches Kriterium vorhanden ist — nicht freilich für das einzelne Quadrat $\mathfrak{q}_x$, sondern für die einzelnen zusammenhängenden, aber gegenseitig voneinander getrennten Gebiete $\mathfrak{g}$, zu denen

sich die verdächtigen Quadrate zusammenfügen: die auf h-ter Stufe vorliegende Genauigkeit genügt, um zu berechnen, welchen Zuwachs

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \arg y = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} \tag{2}$$

erfährt, wenn x das äußere Umrißpolygon Π von $\mathfrak{g}$ durchläuft. Dieser Zuwachs ist eine ganze nicht-negative Zahl $n(\mathfrak{g})$, welche angibt, wie viele Nullstellen in $\mathfrak{g}$ liegen. Jede Seite σ von Π ist nämlich Seite eines nicht nullstellen-verdächtigen Dualquadrats h-ter Ordnung $\mathfrak{q}_x$, welchem in der y-Ebene ein den Nullpunkt nicht enthaltendes Quadrat $\mathfrak{q}_y$ entspricht; infolgedessen ist für die Werte von $\frac{1}{2\pi} \arg y$ auf σ ein Intervall bekannt, dem sie angehören und dessen Länge $< \frac{1}{2}$ ist, und das genügt, um jene ganze Zahl mit Sicherheit zu bestimmen. Indem man jede Seite σ durch jenes zugehörige Quadrat $\mathfrak{q}_y$ in der y-Ebene ersetzt, hat man nur darauf zu achten, wie oft die dem Umrißpolygon Π korrespondierende Kette von Quadraten $\mathfrak{q}_y$ den Nullpunkt umschließt. Die über die verschiedenen Gebiete $\mathfrak{g}$ erstreckte Summe $\Sigma n(\mathfrak{g})$ ist gleich dem Grad n des Polynoms. Beizubehalten sind nur diejenigen Gebiete $\mathfrak{g}$, für welche $n(\mathfrak{g}) \neq 0$ ist. Bei der Durchführung des Beweises werden wir noch jedes der Gebiete $\mathfrak{g}$ um der Einfachheit willen durch ein $\mathfrak{g}$ einschließendes Rechteck $\mathfrak{r}$ ersetzen.

Es ist weiter erforderlich, daß die Gebiete $\mathfrak{g}$ bei unbegrenzt fortgesetzter Teilung schließlich beliebig klein werden und sich auf einzelne Punkte zusammenziehen. Dies beruht offenbar darauf, daß die Dichtigkeit der Wurzelverteilung eine von vornherein angebbare Schranke nicht übersteigt, weil nur eine beschränkte Anzahl von Wurzeln, nämlich höchstens n, existieren. Der Satz muß folgendermaßen verschärft werden: Hat das Polynom (1) an $n+1$ Stellen $x = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Werte, welche absolut $\leqq \varepsilon$ sind, so können nicht alle Abstände $|\alpha_i - \alpha_k|$ $(i \neq k)$ dieser $n+1$ Werte voneinander $> \sqrt[n]{n\varepsilon}$ sein. An der Schranke $\sqrt[n]{n\varepsilon}$ ist natürlich allein das von Wichtigkeit, daß sie mit ε gegen 0 konvergiert. Der Beweis ergibt sich sogleich aus der Lagrangeschen Interpolationsformel: Hat $f(x)$ an der Stelle $x = \alpha_i$ den Wert β_i, so ist nach ihr der höchste Koeffizient von f:

$$1 = \frac{\beta_0}{(\alpha_0 - \alpha_1) \ldots (\alpha_0 - \alpha_n)} + \cdots .$$

Sind alle Differenzen $|\alpha_i - \alpha_k| \geqq \delta$ $(i \neq k)$, alle $|\beta_i|$ hingegen $\leqq \varepsilon$, so folgt daraus

$$\frac{n\varepsilon}{\delta^n} \geqq 1, \quad \text{d. i.} \quad \delta \leqq \sqrt[n]{n\varepsilon}.$$

Die Konstruktion verläuft demnach folgendermaßen: $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_x$ bedeute jetzt ausschließlich die nullstellen-verdächtigen Dualquadrate h-ter Ordnung; ihnen entsprechen in der y-Ebene die Quadrate $\mathfrak{q}_y$, welche den Nullpunkt

enthalten. Die größte unter den Seitenlängen dieser endlichvielen $\mathfrak{q}_y$ ein Dualbruch mit dem Nenner 2^h — sei ε_h, δ_h aber der kleinste Dualbruch mit dem Nenner 2^{h+1} und ungeradem Zähler, für welchen $\delta_h^n \geqq 2n\varepsilon_h$ ist. Es gilt $\lim_{h=\infty} \delta_h = 0$. Wir beginnen mit einem Quadrat $\mathfrak{q}_x = \mathfrak{q}_1$ und vergrößern es unter Festhaltung seines Mittelpunktes zu einem Quadrat $\mathfrak{q}_1^*$ von der Seitenlänge $2\delta_h$. Gibt es noch nullstellen-verdächtige $\mathfrak{q}$ außerhalb dieses größeren $\mathfrak{q}_1^*$, so wählen wir eines von ihnen und vergrößern es in der gleichen Art zu $\mathfrak{q}_2^*$. Existieren weiter Quadrate $\mathfrak{q}$, welche weder zu $\mathfrak{q}_1^*$ noch zu $\mathfrak{q}_2^*$ gehören, so verfällt eines von ihnen abermals dem gleichen Vergrößerungsprozeß: $\mathfrak{q}_3^*$; und so fort. Nach dem Hilfssatz kann sich das nicht öfter als n-mal wiederholen: wir bekommen höchstens n Quadrate $\mathfrak{q}_1^*, \mathfrak{q}_2^*, \ldots$, welche alle $\mathfrak{q}$ enthalten. Wünscht man eine bestimmte Vorschrift für die Reihenfolge, in der die Quadrate vorgenommen werden, so setze man etwa fest, daß von je zwei Dualquadraten dasjenige den Vorrang hat, welches weiter links liegt; konkurrieren aber zwei solche Quadrate, welche demselben Vertikalstollen angehören, soll das tiefer gelegene den Vorrang haben. Die Quadrate $\mathfrak{q}_1^*, \mathfrak{q}_2^*, \ldots$ brauchen nicht völlig getrennt zu liegen. Wir konstruieren das kleinste (aus Dualquadraten h-ter Ordnung bestehende) Rechteck $\mathfrak{r}_1$, das 1. $\mathfrak{q}_1^*$ enthält und an welches 2. keines der Quadrate $\mathfrak{q}^*$ stößt, ohne ganz in ihm enthalten zu sein. So bekommen wir an Stelle der Quadrate $\mathfrak{q}^*$ höchstens n Rechtecke $\mathfrak{r}$, die alle nullstellen-verdächtigen $\mathfrak{q}$ enthalten und welche sich weder überdecken noch aneinander grenzen. Die Seitenlängen dieser Rechtecke sind höchstens gleich $2n\delta_h$. Für jedes $\mathfrak{r}$ bestimmen wir nach oben gegebener Anweisung die Zahl $n(\mathfrak{r})$ und scheiden diejenigen aus, für welche $n(\mathfrak{r}) = 0$ ist. Bleiben z. B. drei Rechtecke $\mathfrak{r}$ übrig: $\mathfrak{r}', \mathfrak{r}'', \mathfrak{r}'''$ mit den zugehörigen Anzahlen $n(\mathfrak{r}) = 3, 1, 2$ (die Gleichung sei also vom Grade $3 + 1 + 2 = 6$), so definieren wir in dem Wurzelraum $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6)$ ein 12-dimensionales Rechteck $\mathfrak{R}$ durch die Bedingungen: α_1, α_2, α_3 in $\mathfrak{r}'$, α_4 in $\mathfrak{r}''$, α_5, α_6 in $\mathfrak{r}'''$. $\mathfrak{R}$ möge noch ersetzt werden durch das kleinste Quadrat A_h, das aus Dualquadraten h-ter Ordnung zusammengesetzt ist, denselben Mittelpunkt wie $\mathfrak{R}$ hat und $\mathfrak{R}$ ganz im Innern enthält. Beim Übergang zur nächsten Teilungsstufe brauchen wir von vornherein nur diejenigen Dualquadrate $(h+1)$-ter Ordnung in der x-Ebene zu berücksichtigen, welche durch Teilung aus nullstellen-verdächtigen Dualquadraten h-ter Ordnung hervorgehen. Es ergibt sich im Wurzelraum ein ganz im Innern von A_h enthaltenes $2n$-dimensionales Quadrat A_{h+1}. *Mit unbegrenzt wachsendem h konvergiert die Seitenlänge von A_h gegen 0.*

Die beschriebene Konstruktion ist eine solche, die mit einer durch freie Wahl werdenden Schachtelfolge von Dualsternen A_h im Koeffizienten-

raum ($h = 0, 1, 2, \ldots$) gesetzmäßig eine werdende Schachtelfolge von Quadraten A_h im Wurzelraum verknüpft. Sie benutzt lauter längst bekannte Elemente; diese sind aber auch alle für einen konstruktiv durchführbaren Existenzbeweis wirklich erforderlich. Der Satz, zu dem wir gelangen, besagt: *Jedes Polynom* (1) *läßt sich in Linearfaktoren zerlegen:*

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n).$$

Dabei kann noch eine Zusatzbedingung wie

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_n$$

gefordert werden, wo $\prec$ das Zeichen für die Rangordnung gemäß einer oben getroffenen Festsetzung ist. Unzulässig ist hingegen die Behauptung, $f(x)$ lasse sich stets als Potenzprodukt von lauter *verschiedenen* Linearfaktoren darstellen.

In seiner ersten Mitteilung zur „Neubegründung der Mathematik“[12]) hat sich Hilbert in heftiger Polemik gegen die von Brouwer und mir vertretene Auffassung gewendet. Mir scheint, selbst von seinem Standpunkt mit geringem Recht; denn soviel ich sehe, stimmen wir in dem entscheidendsten Punkte miteinander überein. Auch für Hilbert reicht die Kraft des inhaltlichen Denkens nicht weiter als für Brouwer; es ist für ihn ganz selbstverständlich, daß sie die „transfiniten“ Schlußweisen der Mathematik nicht trägt[13]), daß es keine Rechtfertigung für alle die transfiniten Aussagen der Mathematik als *inhaltlicher Wahrheiten* gibt. Er wird nicht leugnen wollen, daß Brouwer hier im „Axiom des ausgeschlossenen Dritten“ den wesentlichen Punkt getroffen hat; dieser neuen Einsicht zufolge kann Hilbert jetzt auch das eigentlich Fragwürdige und zu Begründende, dem inhaltlichen Denken schlechterdings Unzugängliche, was vor ihm als logisch selbstverständlich nicht in die Axiome aufgenommen wurde, sondern unerkannt „zwischen den Zeilen“ sein Wesen trieb, der Formalisierung unterwerfen und zum Kernstück seiner Axiomatik machen. Ein weiterer großer Fortschritt von Hilbert über die Ansätze seines bekannten Heidelberger Vortrages[14]) hinaus liegt in der Anerkennung der Tatsache, daß ohne ein anschaulich-sachhaltiges Denken, das sich nicht auf Axiome gründen läßt und in welchem sich insbesondere ein finites Prinzip der vollständigen Induktion betätigt[15]), nicht auszukommen ist.

[12]) Abhandlungen aus dem Mathem. Seminar Hamburg **1** (1922), S. 157.

[13]) Vgl. hierzu Hilbert, Die logischen Grundlagen der Mathematik, Math. Ann. **88** (1922), S. 151; namentlich S. 155, 156.

[14]) Verhandlungen des 3. internationalen Mathematiker-Kongresses (1904), S. 174.

[15]) Dem wird kein Abbruch dadurch getan, daß das Prinzip auch als eine Formel im Axiomensystem erscheint. Der Syllogismus kommt bei Hilbert sogar in dreierlei Bedeutung vor: erstens als naiv gehandhabtes Prinzip des anschaulichen Denkens,

Mit Hilfe dieses anschaulichen Denkens ist nach Hilbert eine Begründung der elementaren Arithmetik in der Weise möglich, daß ihre Sätze nicht als „Formeln", sondern als inhaltliche Wahrheit verstanden werden[16]). Brouwer zeigt, vor allem vermöge seines Begriffs der werdenden Folge, daß das inhaltliche Denken wesentlich weiter reicht; es ist unter allen Umständen wichtig, zu sehen, *wie* weit man damit kommt. Vielleicht nimmt Hilbert in dieser Frage einen noch radikaleren Standpunkt ein als Brouwer; ich glaube aber, daß solche durchgeführten Beweise wie der eben angegebene für den funktionentheoretischen Fundamentalsatz der Algebra erkennen lassen, daß die Grenzen des finiten Denkens in der Brouwerschen Analysis — wenigstens in der von mir gegebenen Interpretation[17]) — nicht überschritten werden. Auf dem Hintergrund der vorangehenden Epochen der modernen Grundlagenforschung — der ersten Epoche des naiven Existentialabsolutismus (Dedekind, Cantor), der zweiten, welche das „nicht-Prädikative" durch eine Typentheorie zu überwinden strebt (Russell) — heben sich Brouwer und Hilbert deutlich als zusammengehörig zu einer neuen dritten Epoche ab (der Übergang von der 1. zur 2. Epoche wird durch Frege, ein Übergang von der 2. zur 3. durch meine Schrift „Das Kontinuum" aus dem Jahre 1918 bezeichnet).

Die neue, Hilbert eigentümliche Wendung ist die, daß er an den Sätzen der Mathematik ihre inhaltliche Bedeutung fahren läßt und sie zu einem Formelspiel entleert. Gelingt ihm der Beweis der Widerspruchslosigkeit — und er hat den Weg, der zu diesem Ziele führen soll, bereits deutlich und überzeugend abgesteckt[18]) —, so wird ein Resultat gewonnen sein, dem auch ich große Bedeutung zuschreibe, die Vollendung und Krönung von Hilberts axiomatischem Lebenswerk. Die Hilbertsche Mathematik ist aber, wenn man seine Erklärungen ernst nimmt, in der Tat nur ein *Formelspiel*. Die Analogie mit dem Schachspiel sei in einer kleinen Tabelle durchgeführt.

	Schachspiel	Hilbertsche Mathematik
1.	Stein.	Zeichen.
2.	Stellung der Steine auf dem Brett.	Formel.
3.	Ausgangsstellung.	System der Axiome.
4.	Zugregeln.	Regeln, nach denen aus Formeln Formeln „deduziert" werden.

zweitens als axiomatische Formel und drittens als Operationsregel, nach welcher aus „beweisbaren Formeln" beweisbare Formeln entspringen.

[16]) a. a. O. [12]), S. 164.

[17]) Vgl. die unter [11]) zitierte Arbeit.

[18]) In der unter [13]) zitierten Arbeit.

Schachspiel	Hilbertsche Mathematik
5. „Spielgerechte" Stellung (die auf Grund der Zugregeln aus der Ausgangsstellung hervorgegangen ist).	„Beweisbare" Formel (welche auf Grund der Operationsregeln aus den Axiomen hervorgegangen ist).
6. Stellung, in welcher 10 Damen der gleichen Farbe auftreten.	Formel des Widerspruchs.

Durch die sich im finiten anschaulichen Denken betätigende vollständige Induktion kann man beim Schachspiel ebenso einsehen, daß 10 Damen einer Farbe in einer spielgerechten Stellung unmöglich sind, wie Hilbert beweist (oder zu beweisen sich anschickt), daß die Formel des Widerspruchs keine beweisbare Formel ist. (Man geht dabei natürlich von der Bemerkung aus, daß durch einen spielgerechten Zug die Summe der Anzahlen der Damen und Bauern einer Farbe niemals zunehmen kann.) Das ist *Erkenntnis* und nicht mehr *Spiel*; und nur zur Gewinnung dieser einen Erkenntnis wird von Hilbert das inhaltliche Denken benötigt. Auf diesem Standpunkt darf man nicht nach einem tieferen Grund für die angenommenen Axiome und Operationsregeln fragen; auch ist nicht abzusehen, warum man gerade Wert darauf legt, daß das Formelspiel „widerspruchsfrei" ist oder warum man das inhaltliche Denken sich nicht noch mit andern aus dem Spiel entspringenden Fragen beschäftigen läßt. Solange man auf diesem Standpunkt beharrt, ist man in der Tat aller Philosophie überhoben; und es gibt keine andere „Einwendung" dagegen als die Erklärung: Ich spiele nicht mit!

Soll aber Mathematik eine ernsthafte Kulturangelegenheit bleiben, so muß sich nun doch mit diesem Formelspiel irgend ein *Sinn* verknüpfen — Zunächst kann es sich in den Dienst der inhaltlichen Analysis, insbesondere der inhaltlichen Arithmetik stellen. Als das berühmteste Beispiel, in welchem heute transfinite Schlüsse zur Begründung eines finiten Theorems herangezogen werden, nenne ich Dirichlets Klassenzahlbestimmung quadratischer Formen. Definiert man die zur Diskriminante D gehörige Klassenzahl h mit Hilfe einer finiten Reduktionsmethode, so hat man zwei Wege zur Konstruktion von h: der eine ist durch dieses Reduktionsverfahren gegeben, der andere durch Dirichlets explizite Formel. Ist die Behauptung, daß aus einer beliebigen Zahl D sich auf beiden Wegen die gleiche Zahl h ergibt, durch Hilberts formale Analysis transfinit begründet, so ist sie inhaltlich richtig. Ergäbe sich nämlich für einen bestimmten Wert, z. B. $D = 129$, auf dem einen Wege $h = 5$, auf dem andern $h = 7$, so wäre $5 = 7$ und damit $0 = 2$ eine beweisbare Formel im Hilbertschen System, die mit $2 \neq 0$ zusammen zu der Formel des Widerspruchs $0 \neq 0$ führt. So oft also eine beweisbare Hilbert-

sche Formel, inhaltlich interpretiert, einen Sinn gibt — dazu ist insbesondere erforderlich, daß sie die transfiniten Funktionen nicht enthält —, spricht sie einen richtigen Satz der inhaltlichen Analysis aus: der Formalismus ist auf Grund seiner Widerspruchslosigkeit ein legitimes Hilfsmittel zur Gewinnung derartiger Sätze. Immerhin wird man den Wert dieses formalen Hilfsmittels nicht allzu hoch anschlagen. Denn nicht im *Beweis* bei gegebener Konstruktion, sondern in der Erfindung der *Konstruktion* liegt in den meisten Fällen die eigentliche Schwierigkeit. *Nachdem* einmal die vorhin besprochene Konstruktion gefunden ist, welche aus der durch freie Wahl werdenden Schachtelfolge von Dualsternen im Koeffizientenraum die werdende Schachtelfolge von Quadraten im Wurzelraum erzeugt, gelingt der Nachweis mühelos, daß sie die Wurzeln der vorgelegten willkürlichen Gleichung liefert. Und so liegt die Sache fast immer.

Mit dieser untergeordneten Rolle seiner Formeln im Dienste der Brouwerschen Analysis wird sich Hilbert schwerlich zufrieden geben. Ich sehe nur *eine* Möglichkeit, ihnen einschließlich ihrer transfiniten Bestandteile eine selbständige geistige Bedeutung beizulegen. In der theoretischen Physik haben wir das große Beispiel einer Erkenntnis von ganz anderem Gepräge vor uns als die gewöhnliche intuitive oder phänomenale Erkenntnis, welche das in der Anschauung[19]) Gegebene rein ausspricht. Während hier jedes Urteil seinen eigenen, restlos in der Anschauung vollziehbaren Sinn hat, ist dies mit den einzelnen Aussagen der theoretischen Physik keineswegs der Fall; sondern dort steht, wenn es mit der Erfahrung konfrontiert wird, nur das System als Ganzes in Frage. In der *Theorie* gelingt es dem Bewußtsein, „über den eigenen Schatten zu springen", den Stoff des Gegebenen hinter sich zu lassen, das Transzendente darzustellen; aber, wie sich von selbst versteht, nur im *Symbol*. Die Beziehung der symbolischen Konstruktion zum unmittelbar Erlebten muß, wenn nicht explizite beschrieben, so doch irgendwie innerlich verstanden sein; aber diese Beziehung allein kann niemals die theoretische Deutung rechtfertigen. Hier walten Vernunftprinzipien, von denen wir vorerst nur das der Widerspruchslosigkeit klar erfassen; es ist aber gewiß nicht der einzige Leitfaden bei der Ausbildung der theoretischen Physik (der Sinn der *theoretischen* ist uns im Grunde ebenso dunkel wie der Sinn der *künstlerischen* Gestaltung). Wenn ich die phänomenale Erkenntnis als *Wissen* bezeichne, so ruht die theoretische auf dem *Glauben*[20]) — dem Glauben an die

[19]) „Anschauung" wird hier natürlich nicht aufs Sinnliche beschränkt, sondern bezeichnet jeden gebenden Akt.

[20]) Daß der Glaube, d. i. die transzendente Vernunftthesis, ohne welche alles Wissen tot und völlig gleichgültig ist, nicht erst bei „Gott, Freiheit und Unsterblichkeit" auf den Plan tritt, war eine der ersten und wichtigsten Erkenntnisse, welche Fichte über Kant hinausführten.

Realität des eigenen und fremden Ich oder die Realität der Außenwelt oder die Realität Gottes. Ist das Organ jener das „Sehen" im weitesten Sinne, so ist das Organ der Theorie „das Schöpferische". Wenn Hilbert nicht ein bloßes Formelspiel treibt, so will er eine theoretische im Gegensatz zu Brouwers intuitiver Mathematik. Aber wo ist jenes vom Glauben getragene Jenseits, auf das sich ihre Symbole richten? Ich finde es nicht, wenn ich nicht die Mathematik sich völlig mit der Physik verschmelzen lasse und annehme, daß die mathematischen Begriffe von Zahl, Funktion usw. (oder die Hilbertschen Symbole) prinzipiell in der gleichen Art an der theoretischen Konstruktion der wirklichen Welt teilnehmen wie die Begriffe Energie, Gravitation, Elektron u. dgl. Dann aber ist das System kaum durch seine Widerspruchslosigkeit schon ausreichend gerechtfertigt, und es steht ferner zu erwarten, daß es das Schicksal aller andern theoretischen Erkenntnisse teilen wird: im Gegensatz zum phänomenalen Wissen, das wohl dem Irrtum menschlich unterworfen, aber seinem Wesen nach unwandelbar ist, bleiben sie, wie ich glaube, getragen von dem an uns sich vollziehenden Lebensprozeß des Geistes und werden von ihm niemals als ein totes, „endgültiges" Resultat abgesetzt. Vielleicht ist es aber ja doch so, wie Hilbert zu meinen scheint, daß für den mathematischen Teil der theoretischen Weltkonstruktion das Prinzip der Widerspruchslosigkeit zusammen mit der Forderung, die vom naiven Existentialabsolutismus über das Unendliche nach Analogie des Endlichen aufgestellten Behauptungen so weitgehend wie möglich symbolisch zu rechtfertigen, als einziger Leitfaden genügt. In der Geschichte der Physik zeigt sich, daß Anschauung und Theorie beständig Hand in Hand gehen müssen. Auf der einen Seite ist z. B. nicht zu leugnen, daß der Machsche Phänomenalismus der Atomtheorie unterlegen ist; auf der andern Seite aber lehrte Einsteins Relativitätstheorie, wie wichtig der Rückgang auf die anschauliche Bedeutung der theoretischen Konstruktion und die Ausscheidung allzu willkürlicher Elemente (Geometrie, absoluter Raum) sein kann. So ist es sicherlich von großem Nutzen, daß uns Brouwer in der Mathematik wieder den Sinn für das anschaulich Gegebene gestärkt hat. Seine Analysis spricht den Gehalt der mathematischen Urintuition rein aus und ist darum von rätselloser Klarheit durchleuchtet. Aber neben dem Brouwerschen wird man den Hilbertschen Weg verfolgen müssen; denn es ist nicht zu leugnen, daß in uns ein vom bloß phänomenalen Standpunkt schlechterdings unverständliches theoretisches Bedürfnis lebendig ist, dessen auf symbolische Darstellung des Transzendenten gerichteter Schaffensdrang Befriedigung verlangt. Aber hier beginnt das Rätsel, und so sind auch diese Schlußgedanken nur ein zaghaftes Hinaustasten ins Dunkel.

(Eingegangen am 25. Oktober 1923.)

Über orthogonale und Bewegungsinvarianten von Linearformen.

Von

R. Weitzenböck in Amsterdam.

Wenn in einem $(n-1)$-dimensionalen Euklidischen Raume (Gebiet n-ter Stufe, $n \geqq 4$) höchstens $n-3$ Linearformen $(a'x), \ldots$ gegeben sind, so besteht der Satz, daß jede ganze rationale Orthogonalinvariante dieser Formen sich ganz und rational durch die inneren Produkte $(a'\ b') = a_1' b_1' + \ldots + a_{n-1}' b_{n-1}'$ ausdrücken läßt. Ich habe von diesem Satze in meinem Buche „Invariantentheorie" (P. Noordhoff, Groningen (1923)) einen Beweis gegeben, der unzureichend ist, worauf mich Herr H. Weyl brieflich aufmerksam machte. Das gleiche gilt von dem Beweise eines, die einfachsten Bewegungsinvarianten von höchstens $n-1$ Linearformen betreffenden Satzes (§ 3). Die nachstehenden Ausführungen bringen beides in Ordnung. Die Bezeichnung wähle ich so wie in meinem Buche, auf das ich im folgenden kurz durch „Inv.Th." verweise[1]).

§ 1.

Orthogonale Invarianten.

Es sei zunächst $n \geqq 4$ und $K \not\equiv 0$ eine ganze rationale orthogonale Invariante von m Linearformen $a', b', \ldots$. Ist $m \geqq n-1$, so kann man durch Reihenentwicklung die orthogonalen Invarianten

$$(a'b' \ldots f'g') = \Sigma \pm a_1' b_2' \ldots f_{n-1}' g_n' \quad \text{und} \quad (a'b' \ldots f'l') = \Sigma \pm a_1' b_2' \ldots f_{n-1}'$$

absondern („Inv.Th." S. 238 u. 239) und sich auf $m \leqq n-2$ beschränken. Durch einen (bei $n=4$ von H. Burkhardt zuerst angewendeten) Kunstgriff läßt sich der Fall $m = n-2$ auch noch auf $m \leqq n-3$ reduzieren („Inv.Th." S. 240), wobei sich gleichzeitig aus der Richtigkeit obigen Satzes für $m \leqq n-3$ auch noch die Richtigkeit für $m = n-2$ ergibt („Inv.Th." S. 240, Schluß des § 3).

[1]) Der folgende § 1 hat an Stelle des Textes nach Gleichung (15), S. 243 der „Inv.Th." zu treten. Der § 2 ist eine Ergänzung zu S. 242; § 3 hat an Stelle des Textes nach Gleichung (9), S. 278 zu treten.

Jetzt ordnen wir K nach Potenzprodukten $k_{\sigma\tau} = k_{\sigma\tau}(a'_{n-1}, b'_{n-1}, \ldots)$ der Größen $a'_{n-1}, b'_{n-1}, \ldots$:

$$K = K_0 + \Sigma k_{\sigma\tau} K_{\sigma\tau}, \tag{1}$$

wo K_0 und die $K_{\sigma\tau}$ keine a'_{n-1}, b'_{n-1}, ... mehr enthalten und wo die $k_{\sigma\tau}$ Formen τ-ten Grades in $a'_{n-1}, b'_{n-1}, \ldots$ sind, linear-unabhängig (mit konstanten Koeffizienten) untereinander.

Dann schließt man leicht („Inv.-Th." S. 243), daß K_0 und die $K_{\sigma\tau}$ orthogonale Invarianten eines Gebietes $(n-1)$-ter Stufe sind. Nehmen wir jetzt den zu beweisenden Satz für $n' = n-1$, $m = n' - 3 = n - 4$ und also auch für $n' = n-1$, $m = n' - 2 = n - 3$ als richtig an, so folgt, da wir in K_0 und in den $K_{\sigma\tau}$ höchstens $n-3$ Linearformen haben, daß K_0 und jedes $K_{\sigma\tau}$ ganz und rational durch Invarianten der Gestalt

$$\omega_{n-2} = a'_1 b'_1 + a'_2 b'_2 + \ldots + a'_{n-2} b'_{n-2}$$

ausgedrückt werden können:

$$K = K_0(\omega_{n-2}) + \Sigma k_{\sigma\tau} K_{\sigma\tau}(\omega_{n-2}). \tag{2}$$

Setzen wir hier $\omega_{n-2} = \omega_{n-1} - a'_{n-1} b'_{n-1}$, wo

$$\omega_{n-1} = a'_1 b'_1 + \ldots + a'_{n-1} b'_{n-1} = (a' \mid b')$$

ist und ordnen neuerdings nach den a'_{n-1}, b'_{n-1}, ..., so folgt („Inv.Th." S. 243):

$$K = K_0(\omega_{n-1}) + \Sigma m_{\sigma\tau} M_{\sigma\tau}(\omega_{n-1}) = K_0 + M(a'_{n-1}, b'_{n-1}, \ldots). \tag{3}$$

Jetzt können wir beweisen, daß M verschwindet. Wir unterwerfen — in Anlehnung an einen Gedanken des Herrn Weyl —, K der infinitesimalen Drehung

$$\begin{cases} \delta a'_1 = -\varrho_1 a'_{n-1}, \ \delta a'_2 = -\varrho_2 a'_{n-1}, \ \ldots, \ \delta a'_{n-2} = -\varrho_{n-2} a'_{n-1}, \\ \delta a'_{n-1} = \varrho_1 a'_1 + \varrho_2 a'_2 + \ldots + \varrho_{n-2} a'_{n-2}. \end{cases} \tag{4}$$

Wegen $\delta \omega_{n-1} = \delta(a' \mid b') = 0$ ist dann

$$\delta K = \delta M = \sum_{i=1}^{i=n-2} \varrho_i \left(\frac{\partial M}{\partial a'_{n-1}} a'_i + \frac{\partial M}{\partial b'_{n-1}} b'_i + \ldots \right),$$

und aus $(1+\mu) K = K + \delta K$ bekommen wir durch den Ansatz $\mu = \mu_1 \varrho_1 + \ldots + \mu_{n-2} \varrho_{n-2}$ die $n-2$ Gleichungen

$$\frac{\partial M}{\partial a'_{n-1}} a'_i + \frac{\partial M}{\partial b'_{n-1}} b'_i + \ldots = \mu_i K \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2). \tag{5}$$

Da $K \neq 0$ und höchstens $n-3$ Linearformen $a', b', \ldots$ vorhanden sind, folgt

$$\begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & \ldots & \mu_1 \\ a'_2 & b'_2 & \ldots & \mu_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{n-2} & b'_{n-2} & \ldots & \mu_{n-2} \end{vmatrix} = 0,$$

also $\mu_i = 0$ und daher aus (5):

$$\frac{\partial M}{\partial a'_{n-1}} = \frac{\partial M}{\partial b'_{n-1}} = \ldots = 0,$$

somit nach (3): $K = K_0(\omega_{n-1})$, w. z. b. w.

§ 2.

Der Fall $n = 3$.

Der Induktionsschluß, der von (1) auf (2) führte, erfordert noch den Nachweis, daß bei $n = 3$ eine einzige Linearform $(a'x) = a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3$ nur $(a'|a') = a'^2_1 + a'^2_2$ als orthogonale Invariante besitzt. Hierbei sei betont, daß wir unter einer orthogonalen Invariante K eine (relative oder absolute) Invariante bezüglich der Drehungen und Spiegelungen verstehen („Inv.Th." S. 235).

Schreiben wir x und y statt a'_1 und a_2, so ist zunächst K homogen vom Grade p in x und y:

$$(6)\quad K = A_\nu x^{p-\nu} y^\nu + A_{\nu+1} x^{p-\nu-1} y^{\nu+1} + \ldots \quad (A_\nu \neq 0),\ (\nu = 0, 1, \ldots, p).$$

Ferner gibt die infinitesimale Drehung $\delta x = \varrho y$, $\delta y = -\varrho x$ die Differentialgleichung:

$$(7)\qquad \frac{\partial K}{\partial x} y - \frac{\partial K}{\partial y} x = \mu K. \qquad (\mu = \text{konst.})$$

Mit deren Hilfe finden wir in (6) $\nu = 0$, und mit Hilfe der Drehung $x' = y$, $y' = -x$ erhalten wir statt (6):

$$(8)\quad K = A_0 x^p + A_1 x^{p-1} y + \ldots + A_{p-1} x y^{p-1} + A_p y^p \quad (A_0 \neq 0,\ A_p \neq 0).$$

Beschränken wir uns zuerst auf Drehungen allein und sehen von Spiegelungen ab. Dann gibt (7), wenn wir (8) einsetzen für die A_h, die Rekursionsformel:

$$(9)\qquad \mu A_h = (p - h + 1) A_{h+1} - (h + 1) A_{h+1},$$

die auch noch für $h = 0$ und für $h = p$ gilt, wenn wir $A_{-1} = A_{p+1} = 0$ setzen.

Schreiben wir nun (9) an für $h = 0, 1, 2, \ldots, p$, so ist:

$$(10)\qquad \begin{cases} \mu A_0 = & -A_1, \\ \mu A_1 = & pA_0 - 2A_2, \\ \mu A_2 = & (p-1)A_1 - 3A_3, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu A_{p-1} = & [p - (p-2)] A_{p-2} - pA_p, \\ \mu A_p = & [p - (p-1)] A_{p-1}. \end{cases}$$

Jetzt setzen wir $(i = \sqrt{-1})$:

$$(11)\qquad \begin{cases} A' = A_0 i^p + A_1 i^{p-1} + \ldots - A_{p-1} i + A_p, \\ A'' = A_0 + A_1 i + \ldots + A_{p-1} i^{p-1} + A i^p. \end{cases}$$

Multiplizieren wir (10) der Reihe nach erstens mit $i^p, i^{p-1}, \ldots, i, 1$ und addieren, so kommt

$$\mu A' = -ipA' ; \tag{12}$$

zweitens multiplizieren wir (10) mit $1, i, i^2, \ldots, i^p$ und addieren:

$$\mu A'' = +ipA''. \tag{13}$$

Nach (7) ist μ durch K eindeutig bestimmt, daher geben (12) und (13):

$$A' = 0 \quad \text{oder} \quad A'' = 0 . \tag{14}$$

Da nun nach (8):

$$[K]_{x=iy} = y^p A', \qquad [K]_{x=-iy} = (-iy)^p A''$$

ist, so folgt, daß K entweder durch $x - iy$ oder durch $x + iy$ teilbar ist. Führen wir die Division aus, so ergibt sich eine Orthogonalinvariante K' vom Grade $p-1$, die wir wieder so behandeln wie K. Dies gibt:

$$K = \text{Produkt von Faktoren } x+iy \text{ und } x-iy. \tag{15}$$

Im zweidimensionalen Falle haben wir also bei Beschränkung auf Drehungen allein $x+iy$ und $x-iy$ als relative Invarianten. Nehmen wir aber die volle gemischte Drehungsgruppe, so findet man mit Hilfe der Spiegelung $x' = x$, $y' = -y$ leicht, daß K nur von $x^2 + y^2$ abhängt. Hierdurch ist der Induktionsbeweis des § 1 in allen Teilen fertig.

Der Vollständigkeit halber führen wir noch an — vgl. die vorstehende Arbeit des Herrn Weyl —, daß bei einer Linearform a' für $n > 3$ auch bei Beschränkung auf Drehungen allein, keine anderen Invarianten als $(a'\ a')$ existieren, daß also, wenn wir inhomogene Koordinaten verwenden, nur absolute Orthogonalinvarianten vorhanden sind; $(a'|a')$ ist ja nur für $n = 3$ reduzibel: $(a'\ a') = (a_1' + ia_2')(a_1' - ia_2')$. Sei nämlich für $n > 3$ $K \not\equiv 0$ eine nur die Drehungen gestattende Invariante der Linearform a', dann liefert ein zu (8) analoger Ansatz mit Hilfe von (7) $\mu = 0$ und daraus schließt man leicht („Inv.Th." S. 241 u. 242), daß K nur von $(a'|a')$ abhängt.

§ 3.

Bewegungsinvarianten.

Der zu beweisende Satz lautet: Sind $a', b', \ldots, p', q'$ höchstens $n-1$ Linearformen, so ist jede ganze rationale Hauptinvariante dieser Linearformen ganz und rational ausdrückbar durch $(a'b' \ldots p'q'l')$ und Invarianten der Gestalt $(a'|b')$.

Beim Beweise können wir zunächst die Invariante $(a'b' \ldots p'q'l')$ absondern und voraussetzen, daß J nur mehr $(a'|b'), \ldots$ und $a_n', b_n', \ldots$ enthält („Inv.Th." S. 276 u. 277). Ordnen wir dann nach linear-unabhängigen Potenzprodukten der $a_n', b_n', \ldots$, so ist:

$$J = \sum_{(\sigma)} [g_1^{(\sigma)} G_1^{(\sigma)} + g_2^{(\sigma)} G_2^{(\sigma)} + \ldots]. \tag{16}$$

Hierbei ist $g_i^{(\sigma)} = g_i^{(\sigma)}(a_n', b_n', \ldots)$ eine Form vom Grade σ in den $a_n', b_n', \ldots$ und die $G_i^{(\sigma)}$ sind Polynome in $(a'|b'), \ldots$, vom Grade $\nu - \sigma$ in allen Reihen zusammen, wenn ν der Gesamtgrad von J ist.

Jetzt unterwerfen wir J den Transformationen („Inv.Th." S. 272, (4)):

$$\bar{a}_i' = (1 + k_n) a_i' \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad \bar{a}_n' = a_n' - (a'|k).$$

Wegen $\bar{G}_i^{(\sigma)} = (1 + k_n)^{\nu - \sigma} G_i^{(\sigma)}$ wird dann aus (16):

$$\mu J = \sum_{\sigma} (1 + k_n)^{\nu - \sigma} [\bar{g}_1^{(\sigma)} G_1^{(\sigma)} + \bar{g}_2^{(\sigma)} G_2^{(\sigma)} + \ldots]$$

und die $\bar{g}_i^{(\sigma)}$ enthalten k_n nicht mehr. Daher kann hier in der Summe rechts nur ein Glied mit $\sigma = \lambda$ stehen. Setzen wir dann $\mu = (1 + k_n)^{\nu - \lambda} \cdot \mu'$, so wird

$$J = g_1^{(\lambda)} G_1^{(\lambda)} + \ldots = J((a'|b'), \ldots, a_n', b_n', \ldots)$$
$$\mu' \cdot J = g_1^{(\lambda)} G_1^{(\lambda)} + \ldots = J((a'|b'), \ldots, a_n', b_n', \ldots)$$

oder, bei Einführung eines neuen Funktionszeichens:

$$\mu' \cdot F(a_n', b_n', \ldots) = F(a_n' - (a'|k), b_n' - (b'|k), \ldots), \tag{17}$$

wo μ' ein Polynom der $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ ist.

Hieraus schließt man aber, daß F überhaupt keine $a_n', b_n', \ldots$ enthält, wodurch obiger Satz bewiesen ist.

Setzen wir nämlich an:

$$\mu' = 1 + \mu_1 k_1 + \mu_2 k_2 + \ldots + \mu_{n-1} k_{n-1} + \ldots$$

und vergleichen in (17) rechts und links die Koeffizienten der ersten Potenzen $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$, so erhalten wir $n - 1$ Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial a_n'} a_i' + \frac{\partial F}{\partial b_n'} b_i' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial q_n'} q_i' = -\mu_i F \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

wozu noch als n-te die Eulersche Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial a_n'} a_n' + \frac{\partial F}{\partial b_n'} b_n' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial q_n'} q_n' = \lambda F$$

hinzukommt. Im ganzen haben wir höchstens $n - 1$ Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial a_n'}, \frac{\partial F}{\partial b_n'}, \ldots$. Sollen diese nicht alle Null sein, so muß die folgende Matrix von n Spalten und höchstens n Zeilen identisch in allen $a', b', \ldots$ verschwinden:

$$\begin{Vmatrix} a_1' & a_2' & \ldots & a_n' \\ b_1' & b_2' & \ldots & b_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_1' & q_2' & \ldots & q_n' \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_{n-1} - \lambda \end{Vmatrix} F.$$

Das ist aber bei $F \not\equiv 0$ dann und nur dann der Fall, wenn alle $\mu_i = 0$ sind und überdies $\lambda = 0$ ist, w. z. b. w.

(Eingegangen am 24. November 1923.)

The infinite product for $(s-1)\zeta(s)$.

By

K. Ananda-Rau in Madras (India).

I. Introduction.

1. The problem of the expression of $(s-1)\zeta(s)$ as an infinite product consists of two parts: firstly, the determination of the *canonical product*[1]) corresponding to the zeroes of the zeta-function, and secondly, the finding of the exponential factor multiplying the *canonical product*. If $x_1, x_2, \ldots$ are the zeroes of $\zeta(s)$ arranged in ascending order of moduli, and if we write

$$(s-1)\zeta(s) = e^{H(s)} \prod_n \left(1 - \frac{s}{x_n}\right) e^{\frac{s}{x_n} + \frac{s^2}{2x_n^2} + \ldots + \frac{s^p}{px_n^p}}$$

in the standard form, the problem consists in the determination of the integral function $H(s)$ and the integer p. In the classical treatment[2]) of the zeta-function the solution of both these questions is made to depend upon the general theory of integral functions.

2. In 1913 Landau made a beautiful application of a theorem of Jensen and proved the following theorem[3]).

Theorem A. *If a Dirichlet's series*

$$f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (s = \sigma + it)$$

having a half-plane of absolute convergence is regular and of finite order

---

[1]) I use the terminology of Borel in his Leçons sur les fonctions entières, 1900.

[2]) Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen (1909), pp. 303–317.

[3]) Über die Nullstellen Dirichletscher Reihen, Berliner Sitzungsber. **41** (1913), pp. 897–907.

in the half-plane $\sigma \geqq \alpha$, *and if* $A(T)$ *denotes the number of zeroes*[4]) *of* $f(s)$ *in this half-plane between* $t = 0$ *and* $t = T$, *then*

$$A(T+1) - A(T) = O(\log T),$$

as T *tends to infinity.*

The following are easy corollaries of the above theorem[5]);

(i) *If* $N(T)$ *denotes the number of zeroes of* $\zeta(s)$ *in* $0 \leqq t \leqq T$, $0 \leqq \sigma \leqq 1$, *then*

$$N(T+1) - N(T) = O(\log T).$$

(ii) *If* $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ *are the non-trivial zeroes of the zeta-function, then* $\sum \frac{1}{\varrho_n^2}$ *is convergent.*

(iii) *The canonical product corresponding to the zeroes of* $\zeta(s)$ *is*

$$\prod \left(1 - \frac{s}{x_n}\right) e^{\frac{s}{x_n}}.$$

The theorem of Landau quoted above has thus made the determination of p independent of the general theory of integral functions. The object of this paper is to obtain the infinite product for $(s-1)\zeta(s)$ in a direct manner, and so make the determination of $H(s)$ independent of the series of theorems which lead to the relation between the *real* and *apparent orders* of an integral function. In effecting this I make use of results, which, besides finding a natural place in the theory of Dirichlet's series, are also known to have other important applications. The theorems used are Theorem A quoted above and another, also due to Landau[6]). I require a modification of the latter theorem, and as it is not convenient to indicate the necessary alterations in the proof of the original theorem, I have thought it desirable to prove here, for the sake of clearness, the modified theorem in full. Finally, I make an application of the theory of residues and obtain the infinite product for $(s-1)\zeta(s)$.

II. Preliminary Lemmas.

3. Lemma 1. *If* $F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ *is a polynomial with real coefficients, then in every interval* $x_0 \leqq x \leqq x_0 + 4$ *there is an* x *for which* $|F(x)| \geqq 2$.

This is proved in Landau's Handbuch, p. 374.

[4]) There is a finite β so that there are no zeroes of $f(s)$ for $\sigma \geqq \beta$; so that $A(T)$ is finite.

[5]) See the reference in foot-note [3]).

[6]) Landau, Handbuch, pp. 375—378.

4. Lemma 2. *Let the analytic function $F(s)$ be regular for $|s - s_0| \leqq r$, and let A be the maximum of the real part of $F(s)$ for $|s - s_0| = r$; further, let*

$$F(s_0) = \beta + i\gamma, \quad 0 < \varrho < r.$$

Then for

$$|s - s_0| \leqq \varrho$$

$$|F(s)| \leqq |\gamma| + |\beta| \frac{r + \varrho}{r - \varrho} + 2A \frac{\varrho}{r - \varrho}.$$

This is the well-known theorem of Carathéodory[7]).

5. In the following we shall have to deal with the values of $\log \zeta(s)$ on the line $\sigma = 2$ and on certain lines in the strip $-\frac{3}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{11}{2}$. These latter lines are parallel to the σ-axis and do not contain any zeroes of the zeta-function. The particular determination of $\log \zeta(s)$, which we take, is governed by the following convention: For $\sigma > 1$,

$$\log \zeta(s) = \sum_m \frac{1}{m p^{ms}},$$

and for the points in $-\frac{3}{2} \leqq \sigma \leqq 1$ under consideration, $\log \zeta(s)$ is taken to be the continuation of the above-mentioned branch along parallel lines to the σ-axis.

6. We shall now prove the following lemma, which is the modification of the theorem of Landau referred to at the end of section I.

Lemma 3. *There is a constant $c_1 > 0$ and a sequence of numbers*

$$T_1 < T_2 < T_3 \ldots, \qquad T_m \to \infty$$

which satisfy the following conditions:

(i) $$20m < T_m < 20m + 20, \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

(ii) $$\zeta(\sigma \pm iT_m) \neq 0 \text{ for any value of } \sigma,$$

(iii) $$|\log \zeta(\sigma \pm iT_m)| < c_1 \log T_m \text{ for } -1 \leqq \sigma \leqq 2.$$

Let us consider the rectangle bounded by $\sigma = -\frac{3}{2}$, $\sigma = \frac{11}{2}$, $T = 20m$, $T = 20m + 20$. Let $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ be the zeroes of $\zeta(s)$ inside and on the boundary of this rectangle, each zero being repeated as many times as is indicated by its multiplicity. Let

$$\varrho_1 = \sigma_1 + it_1, \quad \varrho_2 = \sigma_2 + it_2, \quad \ldots, \quad \varrho_n = \sigma_n + it_n.$$

Consider the polynomial in x,

$$(x - t_1)(x - t_2) \ldots (x - t_n).$$

[7]) Landau, Handbuch, pp. 299–301.

The coefficient of x^n is unity; therefore by Lemma 4 we can find a T' such that

$$20m \leqq T' \leqq 20m + 4, \tag{1}$$

and

$$|(T'-t_1)(T'-t_2)\dots(T'-t_n)| \geqq 2 > 1.$$

For $s = \sigma + iT'$, where $-\frac{3}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{11}{2}$, we shall have

$$|(s-\varrho_1)(s-\varrho_2)\dots(s-\varrho_n)| \geqq |(T'-t_1)(T'-t_2)\dots(T'-t_n)| > 1. \tag{2}$$

By similar reasoning we establish the existence of two other numbers T_m and T'', which satisfy the following conditions:

$$20m + 8 \leqq T_m \leqq 20m + 12, \tag{3}$$

$$20m + 16 \leqq T'' \leqq 20m + 20, \tag{4}$$

$$|(T_m - t_1)(T_m - t_2)\dots(T_m - t_n)| \geqq 2 > 1, \tag{5}$$

$$|(T'' - t_1)(T'' - t_2)\dots(T'' - t_n)| \geqq 2 > 1. \tag{6}$$

As above it follows from (5) and (6) that for $s = \sigma + iT_m$ and $s = \sigma + iT''$, where $-\frac{3}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{11}{2}$, (2) holds good.

Let us now consider the function[8])

$$g(s) = \frac{\zeta(s)}{(s-\varrho_1)(s-\varrho_2)\dots(s-\varrho_n)}.$$

It is clear that $g(s)$ is regular and does not vanish in the rectangle bounded by $\sigma = -\frac{3}{2}$, $\sigma = \frac{11}{2}$, $T = 20m$, $T = 20m + 20$, as also on the boundary. It follows that if $h(s)$ denotes any particular branch of $\log g(s)$, then $h(s)$ is uniform and regular in the rectangle. To fix completely the determination of $\log g(s)$, which we consider, it is sufficient to specify its value at one of the points of the rectangle — say, $2 + iT_m$. We define

$$h(2 + iT_m) = \log \zeta(2 + iT_m) - \sum_{\nu=1}^{n} \log(2 + iT_m - \varrho_\nu),$$

where $\log \zeta(2 + iT_m)$ is the determination specified in § 5 above and

$$-\pi < \operatorname{amp}(2 + iT_m - \varrho_\nu) \leqq \pi \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n). \tag{7}$$

Now, if s lies on the lines $\sigma = -\frac{3}{2}$ or $\sigma = \frac{11}{2}$, we have

$$|s - \varrho_1| > 1, \dots, |s - \varrho_n| > 1,$$

since

$$0 \leqq \sigma_1 \leqq 1, \dots, 0 \leqq \sigma_n \leqq 1,$$

[8]) If $n = 0$, we take $g(s)$ to be simply $\zeta(s)$. In this case we take T', T_m, T'' to be any numbers satisfying (1), (3), (4) respectively.

and so (2) holds good on these lines. Hence, on the boundary of the rectangle P bounded by $\sigma = -\frac{3}{2}$, $\sigma = \frac{11}{2}$, $T = T'$, $T = T''$, we have

$$|g(s)| \leqq |\zeta(s)|.$$

But by a wellknown property of the zeta-function[9])

$$\zeta(s) = \zeta(\sigma + iT) = O(T^a),$$

uniformly for $-\frac{3}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{11}{2}$, $a > 0$ being a constant. Hence

$$g(s) = O(T^a),$$

and so on the boundary of the rectangle P

$$\begin{aligned} \Re h(s) = \log|g(s)| &< K_1 \log T'' \\ &= K_1 \log T_m + K_1 \log \frac{T''}{T_m} \\ &< K_1 \log T_m + K_2, \end{aligned}$$

since

$$1 < \frac{20m+16}{20m+12} \leqq \frac{T''}{T_m} \leqq \frac{20m+20}{20m+8} < 2.$$

Therefore, for every point in the rectangle

$$\Re h(s) < K_1 \log T_m + K_2 = O(\log T_m). \tag{8}$$

In particular, this is satisfied in the circle

$$|s - 2 - T_m i| = \frac{7}{2},$$

which lies entirely inside the rectangle P.

Now, it can be easily deduced from corollary (i) to Theorem A quoted in section I that

$$n = O(\log T_m). \tag{9}$$

It is also known that[10])

$$\log \zeta(2 + iT_m) = O(\log T_m). \tag{10}$$

Further, for $\nu = 1, 2, \ldots, n$,

$$\sqrt{2^2 + 20^2} \geqq |2 + iT_m - \varrho_\nu| \geqq 1,$$

and so remembering (7),

$$|\log(2 + iT_m - \varrho_\nu)| \leqq \log\sqrt{2^2 + 20^2} + \pi = K_3; \tag{11}$$

applying (9), (10) and (11) we get

$$|h(2 + iT_m)| = |\log\zeta(2 + iT_m) - \sum_{\nu=1}^{n} \log(2 + iT_m - \varrho_\nu)| = O(\log T_m).$$

[9]) Landau, Handbuch, pp. 373, foot-note [3]).

[10]) In fact $\log\zeta(2 + iT_m) = O(1)$; see Landau, Handbuch, S. 370.

If we now apply the theorem of Carathéodory (Lemma 2) with

$$F(s) = h(s), \qquad s_0 = 2 + iT_m,$$

$$r = \frac{7}{2}, \qquad \varrho = 3,$$

we get easily for

$$|s - 2 - iT_m| \leqq 3.$$

$$|h(s)| < K_4 \log T_m.$$

In particular,

$$|h(\sigma + iT_m)| = O(\log T_m) \tag{12}$$

uniformly for $-1 \leqq \sigma \leqq 2$.

Further, for $-1 \leqq \sigma \leqq 2$,

$$\sqrt{20^2 + 3^2} \geqq |(\sigma + iT_m - \varrho_1)(\sigma + iT_m - \varrho_2)\ldots(\sigma + iT_m - \varrho_n)| \geqq 1,$$

using (2); and so[11]),

$$\sum_{\nu=1}^{n} \log(\sigma + iT_m - \varrho_\nu) \leqq n[\log\sqrt{20^2 + 3^2} + 3\pi] = O(\log T_m). \tag{13}$$

Therefore, using (12) and (13),

$$\log\zeta(\sigma + iT_m) = |\log h(\sigma + iT_m) + \sum_{\nu=1}^{n} \log(\sigma + iT_m - \varrho_\nu)| = O(\log T_m),$$

uniformly for $-1 \leqq \sigma \leqq 2$.

Since

$$|\log\zeta(\sigma + iT_m)| = |\log\zeta(\sigma - iT_m)|,$$

the lemma is completely proved.

7. Lemma 4. *There is a constant $c_2 > 0$ such that*

(i) *for* $\sigma \leqq -1, \quad |t| \geqq 1,$

(ii) *for* $\sigma = -3, \ -5, \ldots$ *and all* $t,$

(iii) *for* $\sigma \geqq 2$ *and all* $t,$

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < c_2 \log|s|.$$

The proof in cases (i) and (ii) is given in Landau's Handbuch, section 83. In case (iii) $\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|$ is really bounded, since

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leqq -\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}.$$

[11]) It is clear that by continuous variation the amplitude of $(\sigma + iT_m - \varrho_\nu)$ cannot vary by more than 2π.

III. The infinite Product.

8. Let $x \neq 1$, and let R_m be the rectangle bounded by $\sigma = \pm(2m+1)$, $T = \pm T_m$, m being so large that x lies inside the rectangle R_m. We shall apply Cauchy's theorem to the integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,\frac{ds}{s(s-x)},$$

taken round the contour of R_m. The poles of the integrand inside the rectangle are the zeroes of the zeta-function as also 0, 1 and x. Calculating the residues we get

$$(14)\quad \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,\frac{ds}{s(s-x)} = \frac{1}{x}\frac{\zeta'(x)}{\zeta(x)} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + \sum_{R_m}\left[\frac{1}{x_\nu(x_\nu - x)}\right],$$

where the summation extends over all the zeroes x_ν of $\zeta(s)$ inside R_m.

We shall now prove that, as $m \to \infty$, the integral in (14) tends to zero. We have

$$\int_{R_m} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,\frac{ds}{s(s-x)} = \int_{-(2m+1)-iT_m}^{(2m+1)-iT_m} + \int_{(2m+1)-iT_m}^{(2m+1)+iT_m} - \int_{(2m+1)+iT_m}^{-(2m+1)+iT_m} - \int_{-(2m+1)+iT_m}^{-(2m+1)-iT_m}$$
$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

say. On the paths of integration in I_2 and I_4

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < c_2 \log s$$

by Lemma 4. Also if D_m denotes the semi-diagonal of R_m,

$$D_m = \sqrt{T_m^2 + (2m+1)^2} \sim \sqrt{404}\, m,$$

since

$$T_m \sim 20\, m.$$

Therefore each of $|I_2|$ and $|I_4|$ is of order

$$O\left[\frac{T_m \log D_m}{(2m+1)(2m+1-|x|)}\right] = O\left(\frac{m \log m}{m^2}\right) = o(1).$$

Next let us write

$$I_1 = \int_{(2m+1)-iT_m}^{-1-iT_m} + \int_{-1-iT_m}^{2-iT_m} + \int_{2-iT_m}^{(2m+1)-iT_m} = J_1 + J_2 + J_3,$$

say. On the paths of integration in J_1 and J_3

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < c_2 \log |s|$$

by Lemma 4. Therefore

$$|J_1| < O\left[\frac{(2m+3)\log D_m}{T_m(T_m-|x|)}\right] = O\left(\frac{m\log m}{m^2}\right) = o(1).$$

We prove similarly that

$$J_3 = o(1).$$

To estimate J_2 we integrate by parts. We have

$$J_2 = \int_{-1-iT_m}^{2-iT_m} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{ds}{s(s-x)} = \left[\frac{\log\zeta(s)}{s(s-x)}\right]_{-1-iT_m}^{2-iT_m} - \int_{-1-iT_m}^{2-iT_m} \frac{\log\zeta(s)(2s-x)}{s^2(s-x)^2}\,ds,$$

the determination of $\log\zeta(s)$ being that specified in § 5. Now applying Lemma 3,

$$\left[\frac{\log\zeta(s)}{s(s-x)}\right]_{-1-iT_m}^{2-iT_m} = O\left[\frac{\log T_m}{T_m(T_m-|x|)}\right] = O\left(\frac{\log m}{m^2}\right) = o(1);$$

and

$$\left|\int_{-1-iT_m}^{2-iT_m} \frac{\log\zeta(s)(2s-x)}{s^2(s-x)^2}\,ds\right| = O\left[\frac{D_m\log T_m}{T_m^2(T_m-|x|)^2}\right] = O\left(\frac{m\log m}{m^4}\right) = o(1).$$

Hence, finally

$$I_1 \to 0.$$

The proof that $I_3 \to 0$ follows exactly the same lines as that for $I_1 \to 0$.

We have thus proved that

$$\frac{\zeta'(x)}{x\zeta(x)} + \frac{1}{x-1} - \frac{\zeta'(0)}{x\zeta(0)} + \lim_{m\to\infty} \sum_{R_m} \frac{1}{x_\nu(x_\nu - x)} = 0,$$

or

$$\frac{\zeta'(x)}{\zeta(x)} + \frac{1}{x-1} = \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - 1 - \lim_{m\to\infty} \sum_{R_m} \frac{x}{x_\nu(x_\nu - x)}. \tag{15}$$

Now, since by corollary (ii) to Theorem A

$$\sum \frac{1}{|x_\nu|^2}$$

is convergent, we may write

$$-\lim_{m\to\infty} \sum_{R_m} \frac{x}{x_\nu(x_\nu - x)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{x+2n} - \frac{1}{2n}\right] + \sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{x-\varrho_n} + \frac{1}{\varrho_n}\right],$$

separating the trivial zeroes $-2, -4, \ldots$ from the non-trivial zeroes ϱ_n. Substituting the above in (15), and integrating, and raising each side to the power of e we get

$$(x-1)\zeta(x) = Ae^{Bx}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{2n}\right)e^{-\frac{x}{2n}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{\varrho_n}\right)e^{\frac{x}{\varrho_n}},$$

where

$$B = \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - 1 = \log 2\pi - 1,$$

and A is an arbitrary constant. To determine it we put $x = 0$ and obtain

$$A = -\zeta(0) = \frac{1}{2},$$

which completes the proof.

IV. Additional Remarks.

9. In the foregoing we confined ourselves to the case of the zeta-function. A glance will, however, show that the same reasoning can be applied to other functions, which occur in the Analytic Theory of Numbers, and which possess properties analogous to those of the zeta-function. The infinite products corresponding to the functions $L(s)$, which appear associated with the *characters*, can be similarly obtained. The materials necessary for the proof are found in Landau's Handbuch.

(Eingegangen am 12. Dezember 1922.)

Zum Vertrieb wurde mir übergeben:

Carl Friedrich Gauss Werke

Herausgegeben von der

Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

Band I. **Disquisitiones arithmeticae.** Zweiter Abdruck. 478 S. gr. 4°. 1870.
Geb. 48 Goldmark / 15,60 Dollar

„ II. **Höhere Arithmetik.** Zweiter Abdruck. 538 S. gr. 4°. 1876
Geb. 53 Goldmark / 17,20 Dollar

Nachtrag zum ersten Abdruck des II. Bandes. 33 S. gr. 4°. 1876.
Geb. 3,80 Goldmark / 1,20 Dollar

„ III. **Analysis.** Zweiter Abdruck. 499 S. gr. 4°. 1876. Geb. 50 Goldmark / 16,25 Dollar

„ IV. **Wahrscheinlichkeitsrechnung und Geometrie.** Zweiter Abdruck. 492 S. gr. 4°. 1880.
Geb. 50 Goldmark / 16,25 Dollar

„ V. **Mathematische Physik.** Zweiter Abdruck. 642 S. gr. 4°. 1877.
Geb. 64 Goldmark / 21 Dollar

„ VI. **Astronomische Abhandlungen und Aufsätze.** 664 S. gr. 4°. 1874.
Geb. 69 Goldmark / 22,40 Dollar

„ VII. **Theoretische Astronomie.** 650 S. gr. 4°. 1906. Geb. 65 Goldmark / 21,20 Dollar

„ VIII. **Arithmetik, Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Geometrie.** (Nachträge zu Band I—IV.) 458 S. gr. 4°. 1900. Geb. 46 Goldmark / 15 Dollar

„ IX. **Geodäsie.** (Fortsetzung von Band IV.) 528 S. gr. 4°. 1903. Geb. 53 Goldmark / 17,20 Dollar

„ X. Abteilung 1. **Nachlaß und Briefwechsel zur reinen Mathematik.** (Nachträge zu Band I bis IV und VIII. 586 S. und einer photographischen Nachbildung des Tagebuches. gr. 4°. 1917. Geb. 59 Goldmark / 19,20 Dollar

„ X. Abteilung 2. Abhandlung I und V. **Über Gauss' zahlentheoretische Arbeiten** von Paul Bachmann. — **Gauss und die Variationsrechnung** von Oscar Bolza. 74 und 95 S. gr. 4°. 1922. 17 Goldmark / 5,50 Dollar

„ X. Abteilung 2. Abhandlung IV. **Gauss als Geometer** von Paul Stäckel. 123 S. gr. 4°. 1923. 12,50 Goldmark / 4 Dollar

Weitere Bände befinden sich in Vorbereitung.

Nachbildung des Tagebuchs (Notizenjournals) 1796 bis 1814. 1,20 Goldmark / 0,40 Dollar

Materialien für eine wissenschaftliche

Biographie von Gauss

Gesammelt von

F. Klein, M. Brendel und L. Schlesinger

Heft 1. **Über Gauss' zahlentheoretische Arbeiten.** Von P. Bachmann in Weimar. III, 54 S. gr. 8°. 1911. 2,80 Goldmark / 1 Dollar

„ 2/3. C. F. Gauss: **Fragmente zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels aus den Jahren 1797 bis 1799. — Über Gauss' Arbeiten zur Funktionentheorie.** Von L. Schlesinger in Gießen. IV, 34 und 143 S. gr. 8°. 1912. 9 Goldmark / 2,90 Dollar

„ 4/5. **C. F. Gauss als Zahlenrechner.** Von A. Galle in Potsdam. — **C. F. Gauss als Geometer.** Von P. Stäckel in Heidelberg. IV, 142 S. gr. 8°. 1918. 7,20 Goldmark / 2,40 Dollar

„ 6. **Die Wechselwirkung zwischen Zahlenrechnen und Zahlentheorie bei C. F. Gauss.** Von Ph. Maennchen in Gießen. (IV, 47 S. gr. 8°. 1918. 2,40 Goldmark / 0,85 Dollar

„ 7. **Über die astronomischen Arbeiten von Gauss.** Von M. Brendel in Frankfurt a. M. Erster Abschnitt: Theoretische Astronomie. IV, 106 S. gr. 8°. 1919. 5,60 Goldmark / 1,80 Dollar

„ 8. **Zahlbegriff und Algebra bei Gauss.** Von A. Fraenkel in Marburg a. d. Lahn. Mit einem Anhang von A. Ostrowski in Göttingen: **Zum ersten und vierten Gauss'schen Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra.** II, 59 S. gr. 8°. 1920. 3 Goldmark / 1 Dollar

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

Unter dieser Rubrik werden wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften veröffentlichen, die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, von dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu wollen.

Worms de Romilly, P., Quelques réflexions sur la Relativité. Avec une Préface par **M. Lecornu.** Paris, Librairie scientifique J. Hermann, 1923. 59 S. 8°.

Becquerel, Jean, Champ de gravitation d'une sphère matérielle et signification physique de la formule de Schwarzschild. Paris, Librairie scientifique J. Hermann, 1923. 32 S. 8°.

Bachmann, P., Zahlentheorie. Vierter Teil: Die Arithmetik der quadratischen Formen. Zweite Abteilung. Herausgegeben von **R. Haussner.** Leipzig-Berlin, B. G. Teubner, 1923. XXII u. 537 S. 8°.

Czuber, E., Mathematische Bevölkerungstheorie. (Auf Grund von G. H. Knibbs' „The mathematical theorie of population" dargestellt.) Leipzig-Berlin, B. G. Teubner, 1923. XVI u. 357 S. 8°.

Seeliger, Prof. Dr R. **Aufgaben aus der theoretischen Physik.** Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn, 1921. (X u. 154 S.)

Schlömilch, O., Kompendium der höheren Analysis. In sechster Auflage bearbeitet von **A. Kneser.** Erster Band. Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn, 1923. (X u. 620 S.)

Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 153, Heft 1/2, ausgegeben am 27. August, Berlin und Leipzig, Walter de Gruyter & Co. S. 1—140. 4°. 1923.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von L. Lichtenstein. Band 46, Jahrgang 1916—1918. Heft 2, S. 561—960. Vierter und fünfter Abschnitt (Analysis und Geometrie). Berlin und Leipzig, Walter de Gruyter & Co., 1923.

Born, Dr. A., **Isotasie und Schweremessung.** Ihre Bedeutung für geologische Vorgänge. Mit 31 Abbildungen. Berlin, Julius Springer, 1923. (IV u. 160 S.)

Kerékjártó, B. v., Vorlesungen über Topologie. I. Flächentopologie. Mit 60 Textfiguren. Berlin, Julius Springer, 1923. (VIII u. 270 S.) (Band VIII der Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen.)

Fraenkel, Adolph, Prof., **Einleitung in die Mengenlehre.** Eine elementare Einführung in das Reich des Unendlichgroßen. Zweite, erweiterte Auflage. Mit 13 Textfiguren. Berlin, Julius Springer, 1923. (X u. 252 S.) (Band IX der Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen.)

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig